Geogebra

écrit par Kostrzewa Bruno,
professeur de Mathématiques
au lycée Faidherbe de Lille.
(mars 2005)

Contenu

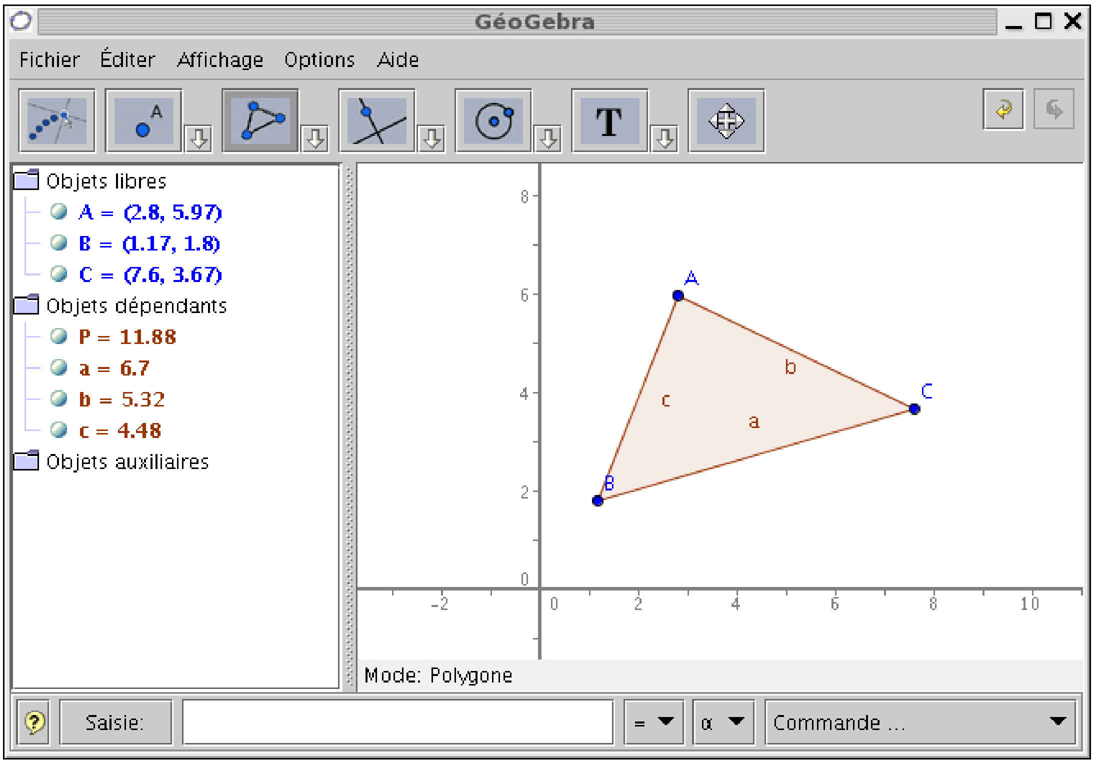
Présentation générale

Geogebra est comme son nom l'indique un logiciel traitant à la fois de géométrie et d'algèbre. Il permet donc de créer des figures géométriques, mais aussi de travailler sur les grandeurs associées comme les longueurs, les aires ou les angles.

Geogebra est une application java qui fonctionne donc sur tout ordinateur muni d'une machine virtuelle java (JRE). Si vous n'en disposez pas encore, vous pouvez la télécharger sur le site java.com.

Vous pouvez utiliser GeoGebra comme vous le désirez et le redistribuer gratuitement sous les termes de la licence GNU General Public License.

Interface



Zone de travail

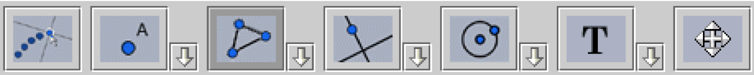
La zone de travail est divisée en deux parties :

- à droite la zone de dessin qui contient la figure;
- à gauche la zone d'information qui affiche la liste des objets créés ainsi que les valeurs numériques les concernant.

Barre de menu

Il s'agit d'une barre de menu traditionnelle. Le menu Fichier permet d'ouvrir ou d'enregistrer des fichiers, mais aussi d'exporter la figure en tant qu'image png qui pourra être facilement incorporé dans un document.

Barre d'icônes



Les 5 icônes centrales permettent de créer rapidement des objets géométriques. Ceux-ci seront nommés de façon automatique.
La première icône active le mode "Déplacer" qui permet de modifier à la souris la position des objets libres.
La dernière icône active le mode "Déplacer la feuille de travail" qui permet de modifier à la souris la position de l'origine du repère utilisé.

Barre de saisie

La barre de saisie permet d'entrer un certain nombre de commandes qui donnent accès à des constructions non disponibles dans la barre d'icônes.

Modifier les caractéristiques des objets

Les objets créés ont un certain nombre de caractéristiques (nom, couleur, mode d'affichage, ...) définies de manière automatique. Pour les modifier on peut utiliser le menu Edition|Propriétés ou un clic droit sur l'objet considéré.

Prise en main

Le site Framasoft propose un tutoriel de présentation par l'exemple.

L'aide fournie avec le logiciel propose quelques exemples de possibilités :

- un triangle avec ses angles
- droite tracée à partir de son équation du type y=ax+b
  On entre les commandes : `a=2`, puis `b=2`, et enfin `d:y=a*x+b`.
  La droite d'équation y=2x+2 est tracée.
  On peut alors cliquer sur la ligne contenant a dans la partie gauche, puis utiliser les touches + et - pour augmenter ou diminuer a. La même chose est évidemment possible avec b.
- centre de gravité d'un triangle
  On crée 3 points A, B et C. Le centre de gravité peut être construit à partir des médianes ou tout simplement avec la formule `G=(A+B+C)/3`.
  Le même genre de formule permet de construire tout barycentre.
- partage d'un segment dans le rapport 7 sur 3
  On crée deux points A et B et on cherche le point M du segment AB tel que AM/MB = 7/3.
  Le vecteur AM est égal aux 7/10 du vecteur AB. Cela se traduit par la formule `M=A+7/10 (B-A)`
- système de deux équations linéaires à deux inconnues
  On crée les droites correspondant aux deux équations; par exemple on pourra entrer les commandes suivantes `g : 3x + 4y = 12` et `h : y = 2x - 8`.
  Les droites sont tracées.
  On obtient le point d'intersection avec la commande `M=Intersection[g,h]`. Il suffit de lire ses coordonnées dans la partie gauche pour avoir la solution du système.
- tangente à une courbe
  On définit la fonction avec une commande du type `f(x)=2*sin(x)`. La courbe est tracée automatiquement. Pour obtenir la tangente en 1, il suffit d'entrer la commande `Tangente[1,f]`.
- fonctions polynômes
  On définit une fonction polynôme comme `f(x)=x^3-3x^2+1`. On obtient les racines avec la commande `R=Racine[f]`. Les 3 points correspondants aux racines apparaissent nommés R1, R2 et R3.

Les commandes `E=Extremum[f]` ou `S=PointInflexion[f]` fonctionnent de la même façon.

- intégrales
  Geogebra permet de montrer simplement comment on approche l'aire sous une courbe par une somme d'aires de rectangles. Par exemple, entrer la fonction `f(x)=x^2/4`, `a=0`, `b=2` et `n=4`; a et b sont les bornes de l'intégrale et n est le nombre de rectangles désirés. Pour obtenir le dessin des rectangles, il suffit d'entrer les commandes `Sinf=LimiteInférieure[f,a,b,n]` et `Ssup=LimiteSupérieure[f,a,b,n]`. Les sommes des aires des rectangles sont affichées dans la partie gauche de la fenêtre. En cliquant sur la ligne correspondant à n et en utilisant les touches + et - on peut facilement augmenter ou diminuer le nombre de rectangles (après avoir fixé dans les propriétés la valeur de l'incrément à 1).

Un exemple d'activité menée avec Geogebra

Il s'agit d'un exercice classique qui peut être mis en oeuvre à différents niveaux. Les fichiers, préparés préalablement par le professeur, sont soit projetés soit distribués aux élèves en salle informatique.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal d'origine O on considère le point A de coordonnées (1,2). M étant un point de l'axe des abscisses, la droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en N. On étudie l'aire du triangle OMN lorsque M varie avec une abscisse strictement supérieure à 1.

Construction de la figure

On construit le repère avec les commandes :

- `O=Intersection[axeX,axeY]`
- `i=(1,0)`
- `j=(0,1)`

On construit le point A avec la commande :

- `A=(1,2)`

Les objets i, j et A sont des objets libres, cela signifie qu'ils peuvent être modifiés avec la souris. Pour les rendre fixes, nous utilisons leurs propriétés (accessibles par le menu Editer|Propriétés) en cliquant pour chacun d'entre eux sur l'option Objet fixe.

Pour garder l'abscisse de M supérieure à 1 nous allons placer M sur un segment M_1M_{100} où M_1 et M_{100} sont d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives 1 et 100. Cela donne les commandes :

- `M_1=(1,0)`
- `M_{100}=(100,0)`
- `DM=Segment[M_1,M_{100}]`
- `M=Point[DM]`

Les objets M_1 et M_{100} sont libres, on les rend fixes.
M apparait sur M_1, mais on peut le déplacer à la souris.

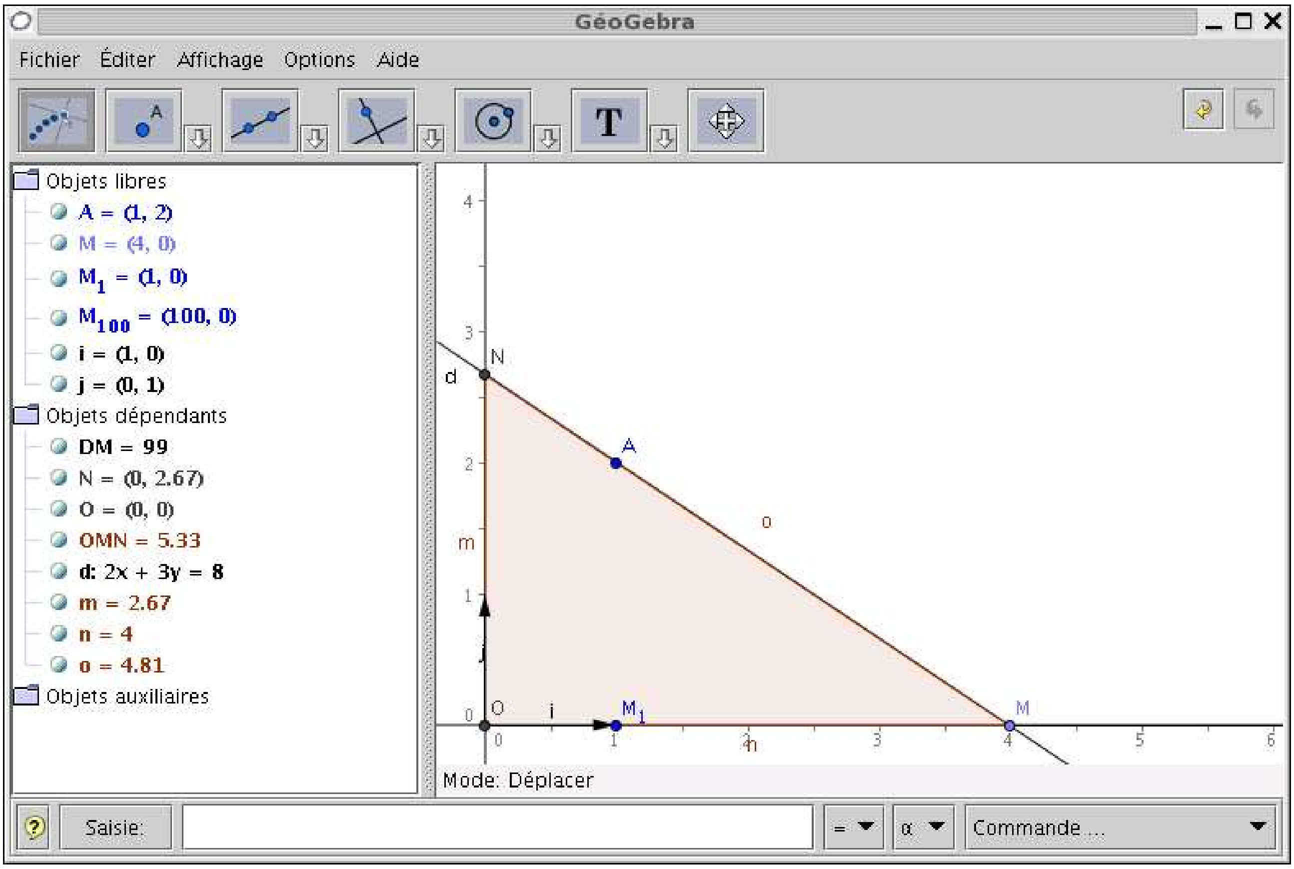
Le point N est obtenu comme intersection de la droite AM et de l'axe des ordonnées. Cela donne :

- `d=Droite[A,M]`
- `N=Intersection[axeY,d]`

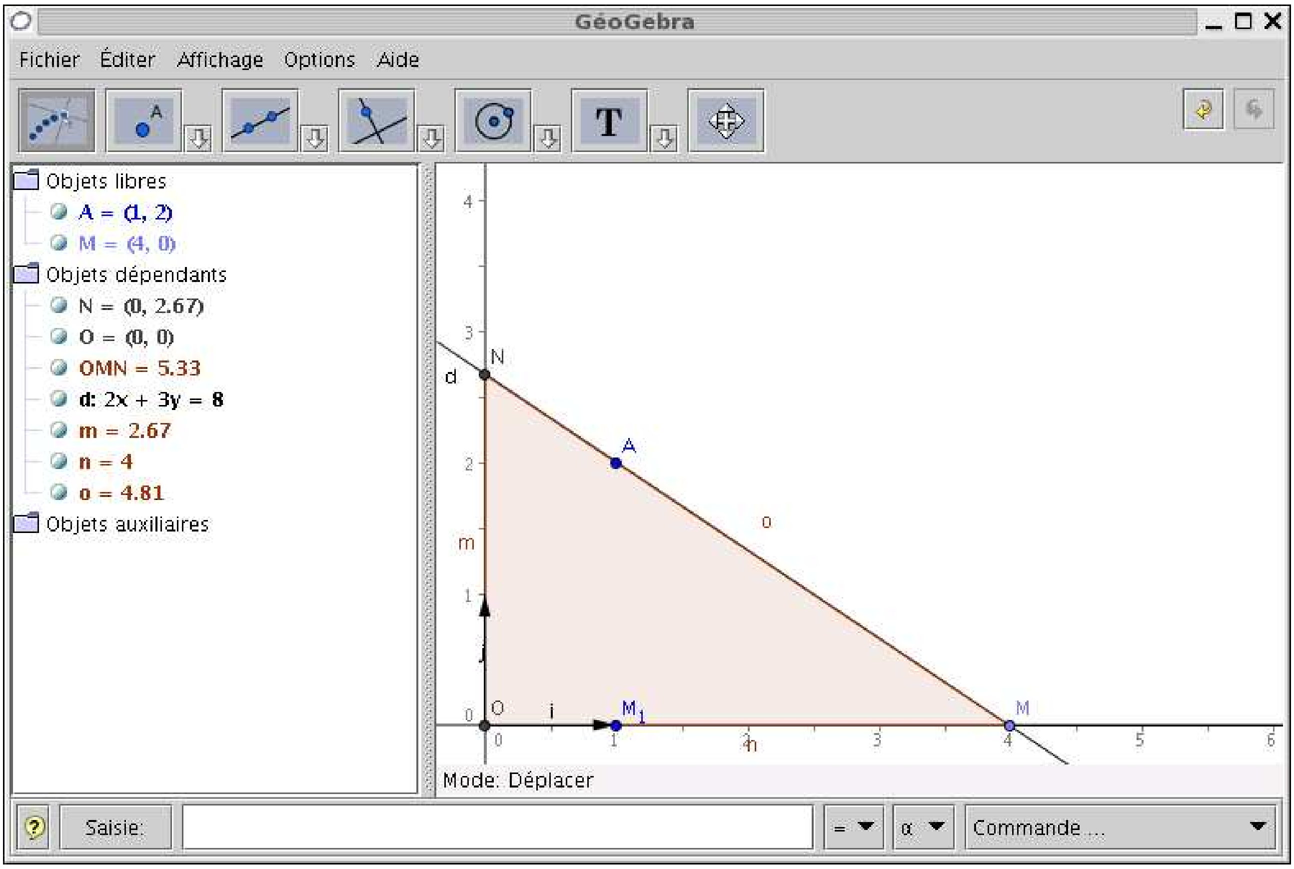
Enfin, on met en évidence le triangle OMN avec la commande :

- `OMN=Polygone[O,M,N]`

On obtient (moyennant quelques zooms et un repositionnement des axes) l'écran suivant :



Pour rendre les données numériques plus facilement lisibles, nous pouvons ranger dans la catégorie Objets auxiliaires les objets qui ont peu d'utilité pour la compréhension du problème, c'est le cas pour M1, M100, i, j et DM. Cette opération s'effectue en éditant leurs propriétés et en cochant la case Objet auxiliaire. En fermant le dossier Objets auxiliaires, on obtient l'affichage suivant :



(fichier aire-triangle1.ggb)

Conjecture

Les élèves voient la figure : on déplace le point M et on observe l'aire du triangle OMN sur la ligne OMN de la partie gauche de la fenêtre.
L'aire semble être minimale égale à 4 lorsque l'abscisse de M est égale à 2.

Démonstration géométrique

Construisons le triangle OEF qui correspond à la situation où l'aire de OMN semble être minimale. On entre les commandes :

- `E=(2,0)`
- `d_1=droite[A,E]`
- `F=intersection[d_1,axeY]`

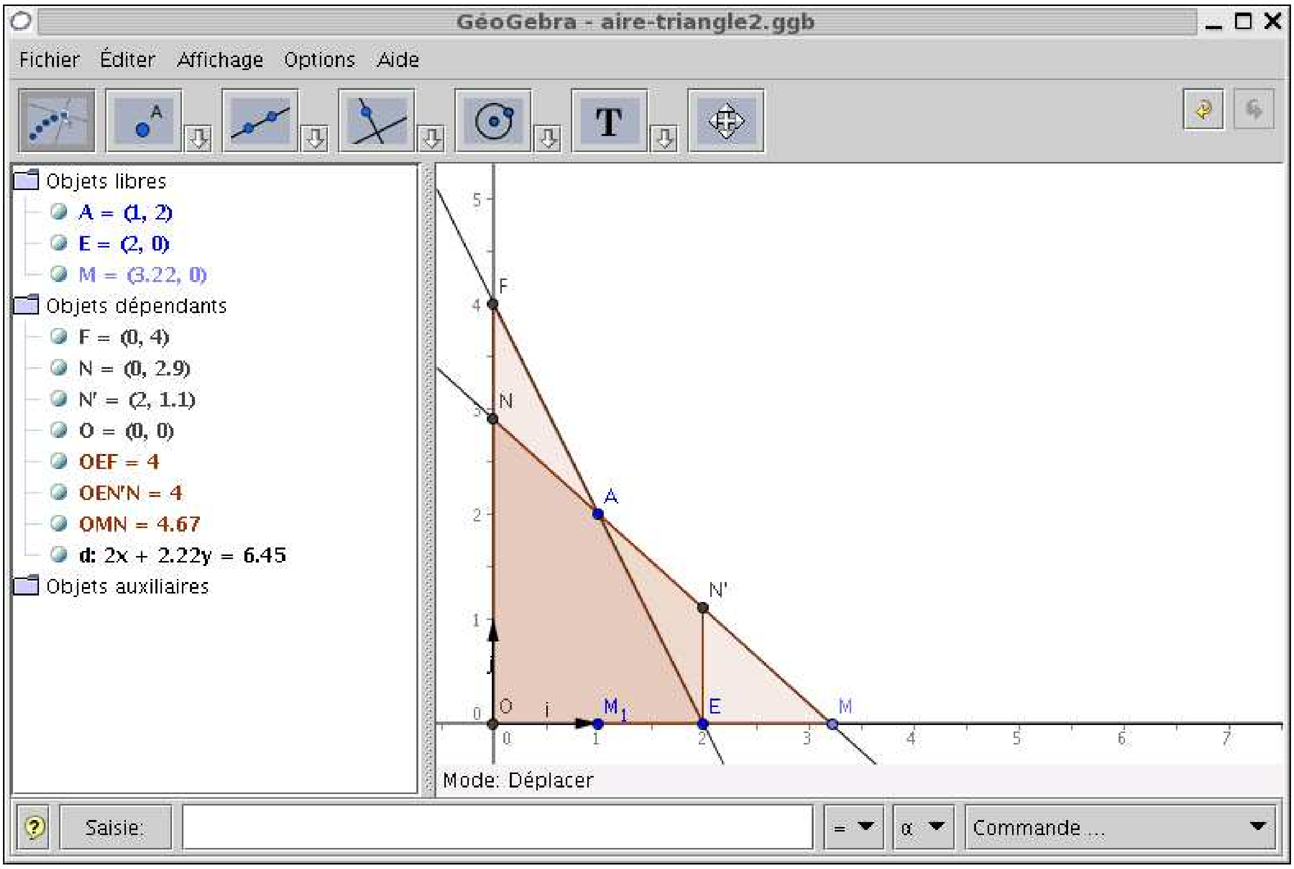
1- On se place tout d'abord dans le cas où l'abscisse de M est supérieure à 2.
Faisons intervenir le point N' symétrique de N par rapport à A.

- `N'=symétrie[N,A]`

Mettons en évidence le triangle OEF et le trapèze OEN'N avec les commandes :

- `OEF=polygone[O,E,F]`
- `OEN'N=polygone[O,E,N',N]`

Ces constructions font apparaitre de nouveaux objets dont un certain nombre pourra être classé dans les objets auxiliaires. De nombreux segments sont créés et une étiquette est affichée pour chacun d'entre eux. On peut supprimer cet affichage à partir des propriétés.



(fichier aire-triangle2.ggb)

En déplaçant le point M on constate que le triangle et le trapèze ont la même aire constamment égale à 4. Le démontrer. Expliquer pourquoi l'aire de OMN est toujours supérieure à celle du trapèze, donc à celle de OEF.

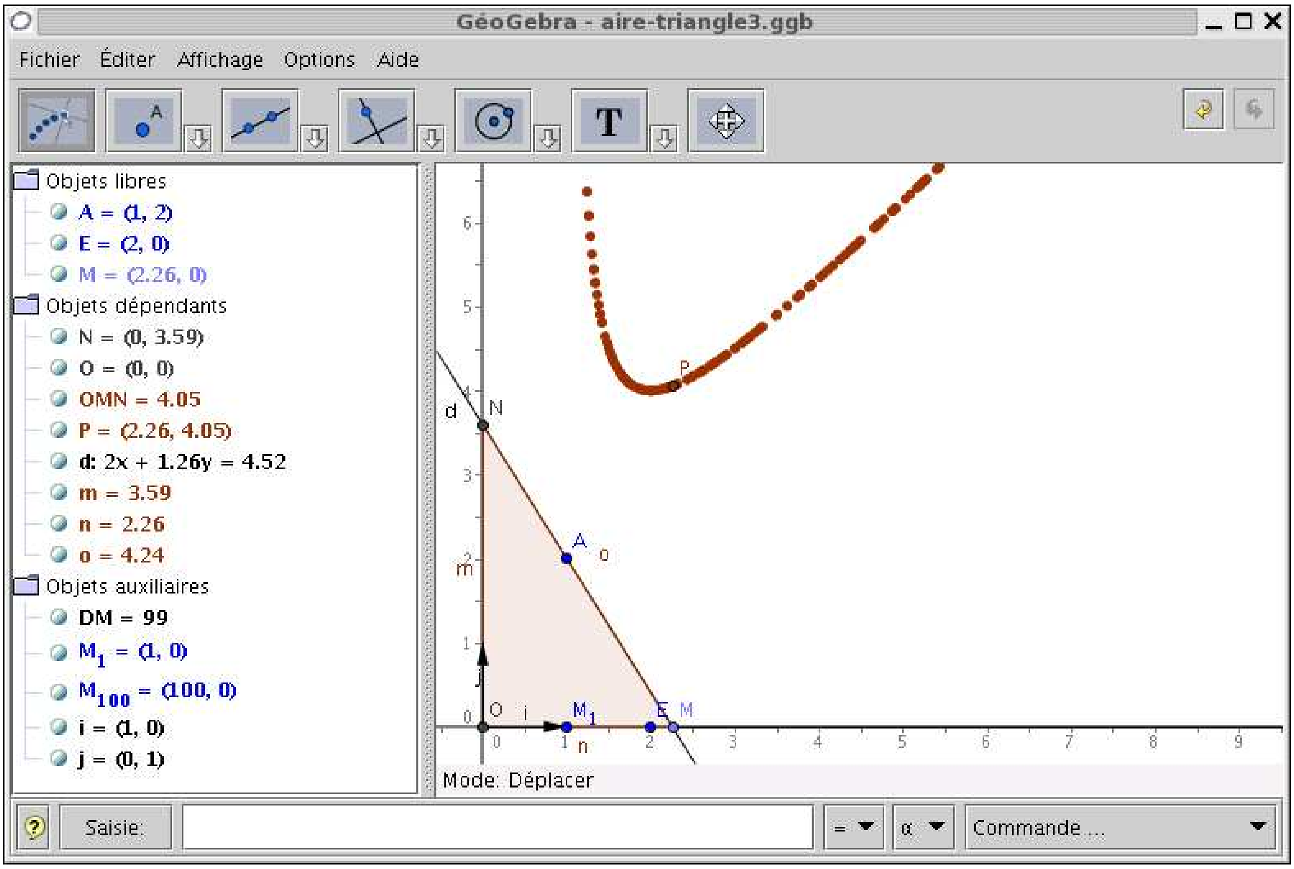
2- Dans le cas où M se trouve entre M_1 et E, on fera intervenir le point M' symétrique de M par rapport à A pour faire un raisonnement similaire.

Utilisation d'une fonction

On peut envisager d'étudier la fonction f qui à x, abscisse de M, associe l'aire de OMN.
Geogebra nous permet d'obtenir facilement la courbe de cette fonction. Il suffit pour cela de créer le point P d'abscisse x et d'ordonnée l'aire de OMN. Cela s'obtient avec la commande :

- `P=(x(M),OMN)`

Dans les propriétés de P nous pouvons modifier sa couleur et surtout cocher la case Afficher la trace.
En déplaçant le point M on voit alors la courbe de f se construire.



(fichier aire-triangle3.ggb)

L'allure de la courbe confirme la conjecture de départ, la fonction f est décroissante pour x situé entre 1 et 2 et croissante pour x supérieur à 2, il y a bien un minimum en x=2.
Pour démontrer ces résultats on pourra calculer l'ordonnée de N et en déduire que $f(x) = x^2/(x-1)$.
Cette formule peut être vérifiée en demandant à Geogebra de tracer la courbe correspondante avec la commande :

- `f(x)=x^2/(x-1)`

La courbe tracée correspond bien à celle obtenue avec le point P.
Pour vérifier que le minimum de f est obtenu pour x=2, on calculera f(x)-f(2) qui est égal à $(x-2)^2/(x-1)$ et qui est donc positif.
On peut aussi procéder à une étude de f en utilisant sa dérivée.

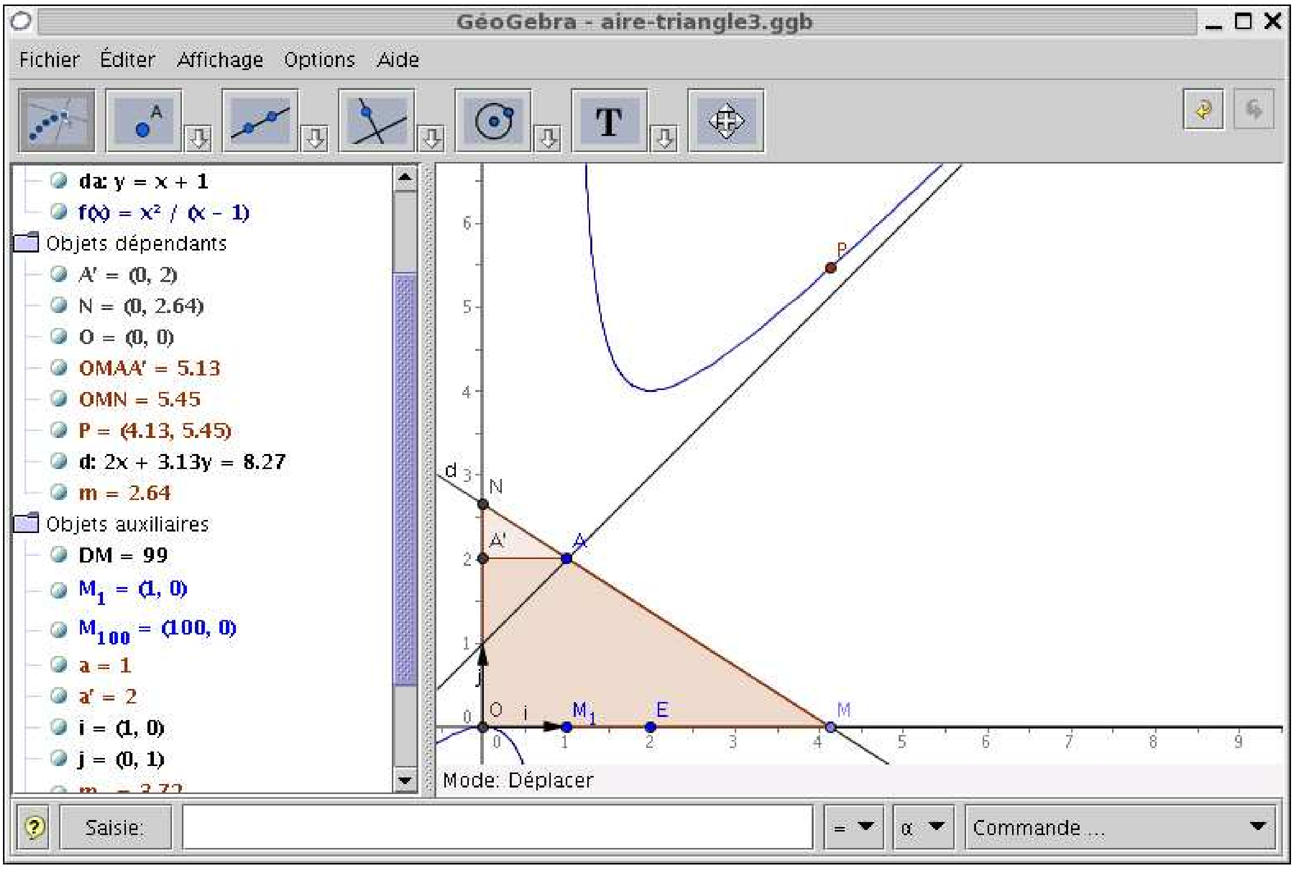
Prolongement : asymptote oblique

La courbe représentative de f laisse penser qu'elle admet une asymptote oblique. Essayons de déterminer son équation.
Construisons le point A' projection de A sur l'axe des ordonnées,

- `A'=(0,y(A))`

puis faisons apparaitre le trapèze OMAA'.

- `OMAA'=polygone[O,M,A,A']`



(fichier aire-triangle4.ggb)

Montrer que l'aire de ce trapèze est égale à x+1.
L'aire de OMN est égale à l'aire de ce trapèze augmentée de l'aire du triangle NAA'.
Lorsque x tend vers l'infini, l'aire de NAA' tend vers 0, f(x) prend donc des valeurs voisines de x+1. Sa courbe se rapproche donc de plus en plus de la droite d'équation y=x+1.
Montrer que l'aire de NAA' est égale à 1/(x-1), et que f(x) = x+1+1/(x-1).