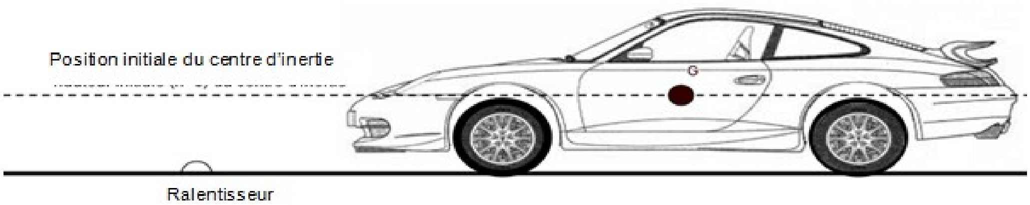
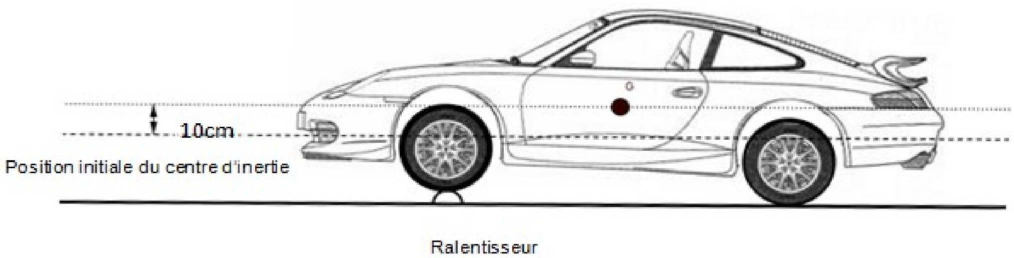
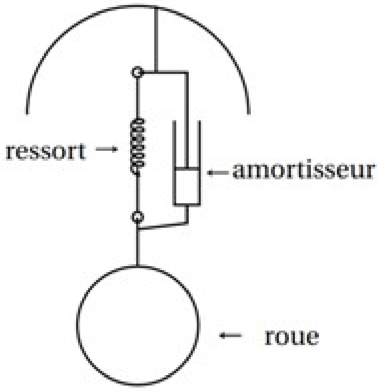
Étude d'amortissement





Une étude est menée concernant la suspension de véhicules. On considère que la suspension d'un véhicule est constituée, au niveau de chaque roue, d'un ressort et d'un amortisseur (voir figure). Pour un véhicule donné, le déplacement vertical des suspensions, en cas de sollicitation, dépend du coefficient d'amortissement λ.



En laboratoire, on étudie le comportement de différents véhicules quand on les écarte de leur position d'équilibre. Le chronomètre est déclenché au moment où le ressort est étiré de 10 cm.

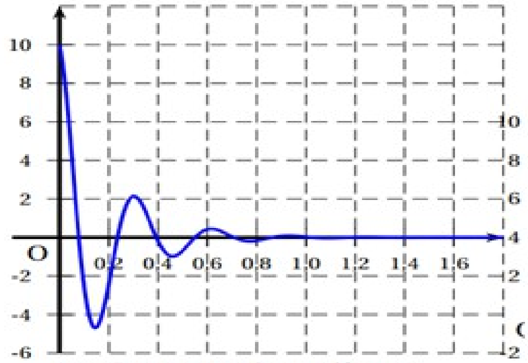
Problématique :

Pour des raisons liées à la sécurité et à la tenue de route, le cahier des charges stipule que dans une telle situation, la hauteur moyenne (par rapport à la position initiale) du centre d'inertie doit être inférieur à 4cm dans un intervalle de temps de 0,25 seconde.

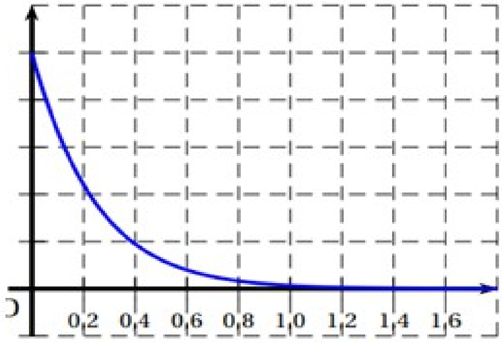
I. Comparaison de deux amortissements

On modélise le déplacement vertical du centre d'inertie du véhicule par rapport à sa position d'équilibre (exprimé en centimètre), en fonction du temps (exprimé en seconde) par la fonction f dont la représentation graphique dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous, pour deux valeurs différentes λ1 et λ2 du coefficient d'amortissement. Lorsque t représente un temps exprimé en seconde, $f(t)$ représente le déplacement vertical du centre d'inertie à l'instant t.

Données : Le bas de caisse est situé à 24 cm du sol. On considère que la sécurité est optimale lorsque la distance entre le sol et le bas de caisse est supérieure à 20cm.



Courbe C_1 avec le coefficient d'amortissement λ_1



Courbe C_2 avec le coefficient d'amortissement λ_2

1. Dans chacun des cas décrire le comportement du véhicule.

2. Quel coefficient d'amortissement (parmi λ_1 [, λ] $_2$) vous parait le plus adapté ? Justifier votre réponse.

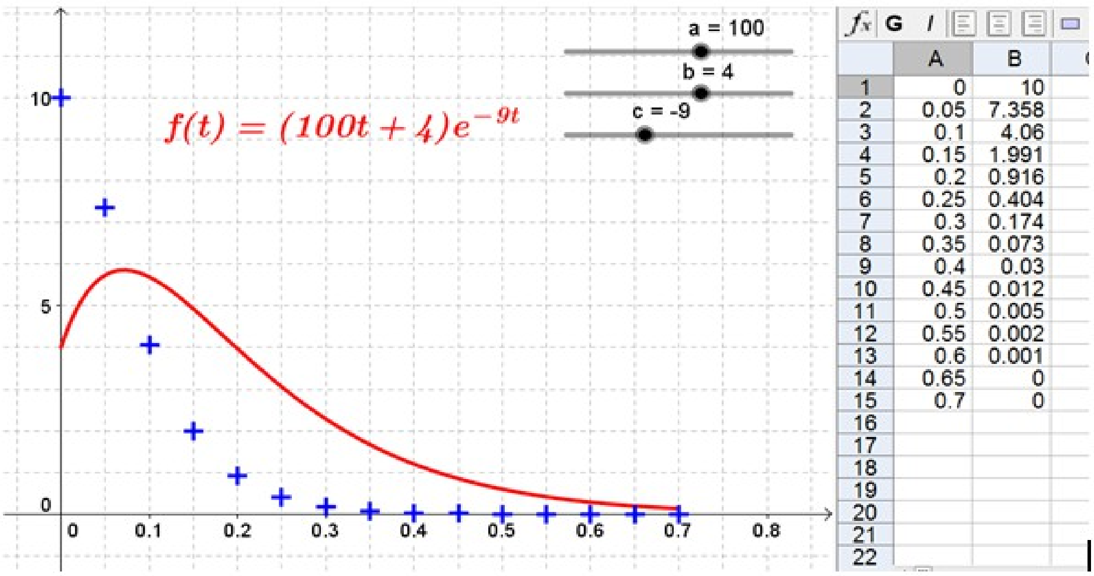
II. Modélisation.

On modélise par $f(t)$ le déplacement vertical du centre d'inertie du véhicule par rapport à sa position d'équilibre (exprimé en centimètre), en fonction du temps (exprimé en seconde) lorsqu'un véhicule roule sur un ralentisseur.

On relève, dans le tableau suivant, différentes valeurs prises par $f(t)$.

Temps (s)	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
Hauteur	10	7,358	4,06	1,991	0,916	0,404	0,174	0,073	0,03

On cherche un modèle de la forme $f(t) = (at + b)e^{ct}$.



	A	B
1	0	10
2	0.05	7.358
3	0.1	4.06
4	0.15	1.991
5	0.2	0.916
6	0.25	0.404
7	0.3	0.174
8	0.35	0.073
9	0.4	0.03
10	0.45	0.012
11	0.5	0.005
12	0.55	0.002
13	0.6	0.001
14	0.65	0
15	0.7	0
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		

1. A l'aide de la position initiale du centre d'inertie ($f(0)=10$) déterminer ***b***.

2. Déterminer à l'aide du fichier Géogébra Activite.ggb fourni, des valeurs possibles des coefficients ***a***, ***b*** et ***c***.

III. Étude de fonction.

Pour la suite de l'étude, nous utiliserons le modèle suivant :

f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

$$f(t) = (200t + 10)e^{-20t}$$

1. Position « limite »

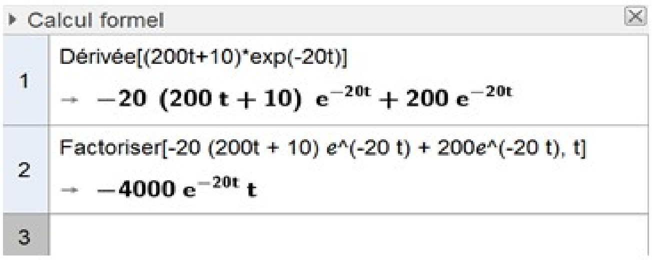
Conjecturer la position du centre d'inertie longtemps après le passage sur le ralentisseur.

Remarque : Cette notion de position limite est appelé « limite de la fonction f *quand t tend vers* $+\infty$ *», nous noterons plus tard :*

$$\lim_{t \to +\infty} f(t)$$

2. Calcul de la dérivée

A l'aide du logiciel Géogébra, on calcule la dérivée de la fonction f notée, f' .



Nous allons étudier un moyen de montrer que : $f'(x) = -4000\ t\ e^{-20t}$

Appliquer la formule du document « Dériver d'un produit de fonctions »

3. Variations, tableau.

Déterminer le signe de f'(x).

En déduire les variations de la fonction f . On répondra en remplissant le tableau suivant :

t	**0** **1**
Signe de $f'(t)$	**0** **1**
Variations de f	

1. Valeur moyenne

a. Tableur

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	temps t(en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	
2	f(t)	10	7,358	4,06	1,991	0,916	0,404	
3								

Quelle formule entrer en C1, peut-on étirer jusqu'en G1 pour remplir ce tableau ?

Même question pour la cellule B2

Calculer une approximation de la hauteur moyenne du centre d'inertie entre t=0sec et t=0,25sec.

b. La hauteur moyenne du centre d'inertie entre 0 sec et 0.5sec est donné par la formule :

$$h_m = \frac{1}{b-a}(F(b) - F(a))$$

Avec $a=0$ $b=0{,}25$; et F une fonction telle que $F'(t)=f(t)$

i. Montrer que la fonction F définie par

$$F(t)=(-10\mathrm{t}-1)e^{-20\mathrm{t}}$$

est une primitive de la fonction f , c'est-à-dire que $F'(t)=f(t)$.

ii. Calculer la hauteur moyenne h_m .

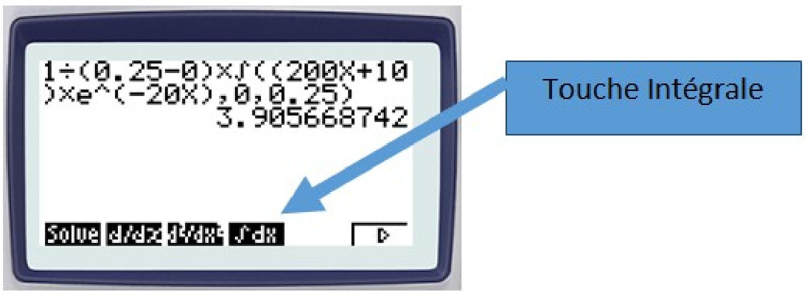
iii. Comparer au résultat de la question 4.a .

a. Calculatrice :

Par la suite nous noterons cette valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle $[a\,;b]$:

$$h_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$$

Déterminer la valeur approchée à 0,01 près de cette valeur moyenne à l'aide du symbole $\int_{\dots}^{\dots} \square$ de la calculatrice.



<u>Répondre à la problématique :</u>

Activité : Dérivée d'un produit de fonctions

Soit f ***la fonction définie sur IR par*** $f(x)=2x^3-2x^2-10x+4$

On admettra que pour tout x on peut aussi écrire : $f(x)=(2x+4)(x^2-3x+1)$

1. Développer l'expression . $(2x+4)(x^2-3x+1)$

En déduire que pour tout x : $f(x)=(2x+4)(x^2-3x+1)$

2. Nous allons utiliser la formule qui permet de calculer la dérivée de 2 fonctions

Partie A: dérivée de f avec $f(x)=2x^3-2x^2-10x+4$

$f'(x)$ = ...

Partie B : dérivée de f **avec** $f(x)=(2x+4)(x^2-3x+1)$

f est de la forme : $f(x)=u(x)*v(x)$

Avec $u(x)$ .... et $v(x)$ ....

Calculer :

$u'(x)$ .... Et $v'(x)$ ....

Calculer puis développer :

$$u'(x)*v(x)+u(x)*v'(x)$$

= $u'(x)*v(x)+u(x)*v'(x)$ = ...

Que remarquez-vous ?

3. Application

On veut calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f(x)=(200x+10)e^{-20x}$$

f est de la forme : $f(x)=u(x)*v(x)$

Avec $u(x)$ .... et $v(x)$ ....

Calculer :

$u'(x)$ .... Et $v'(x)$ ....

Calculer puis développer :

$f'(x)=u'(x)*v(x)+u(x)*v'(x)$

<u>Données : on rappelle</u>

$f(x) =$	$f'(x) =$
c	0
ax	a
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$
e^x	e^x
e^{ax}	$a \times e^{ax}$