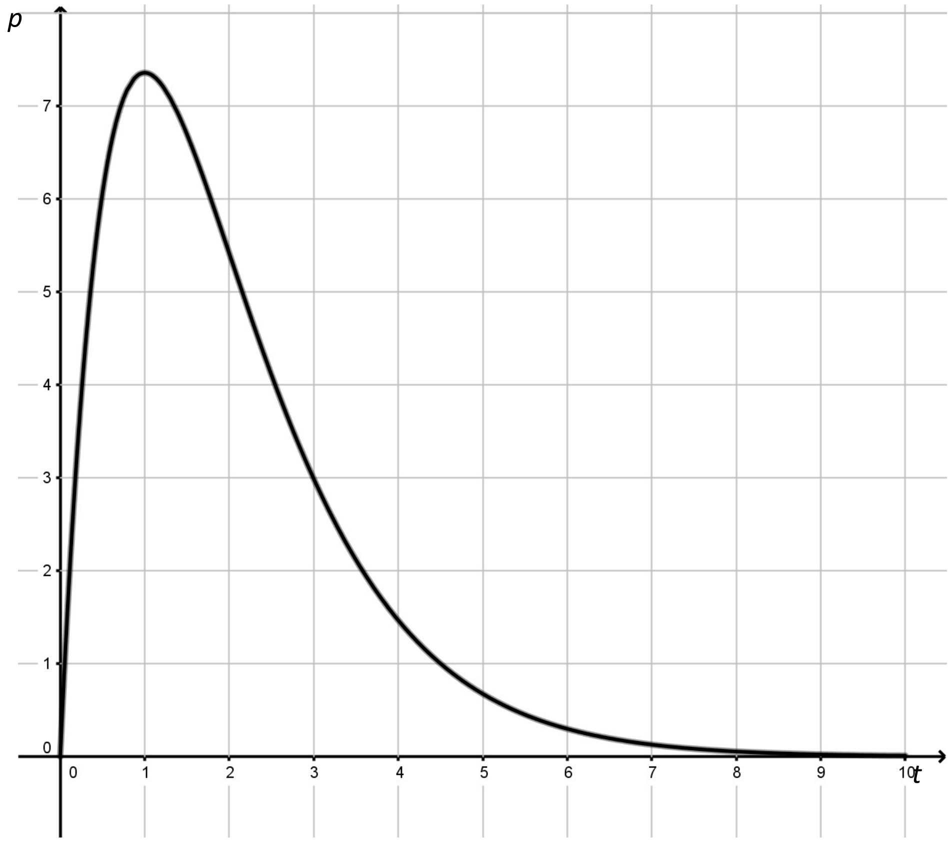
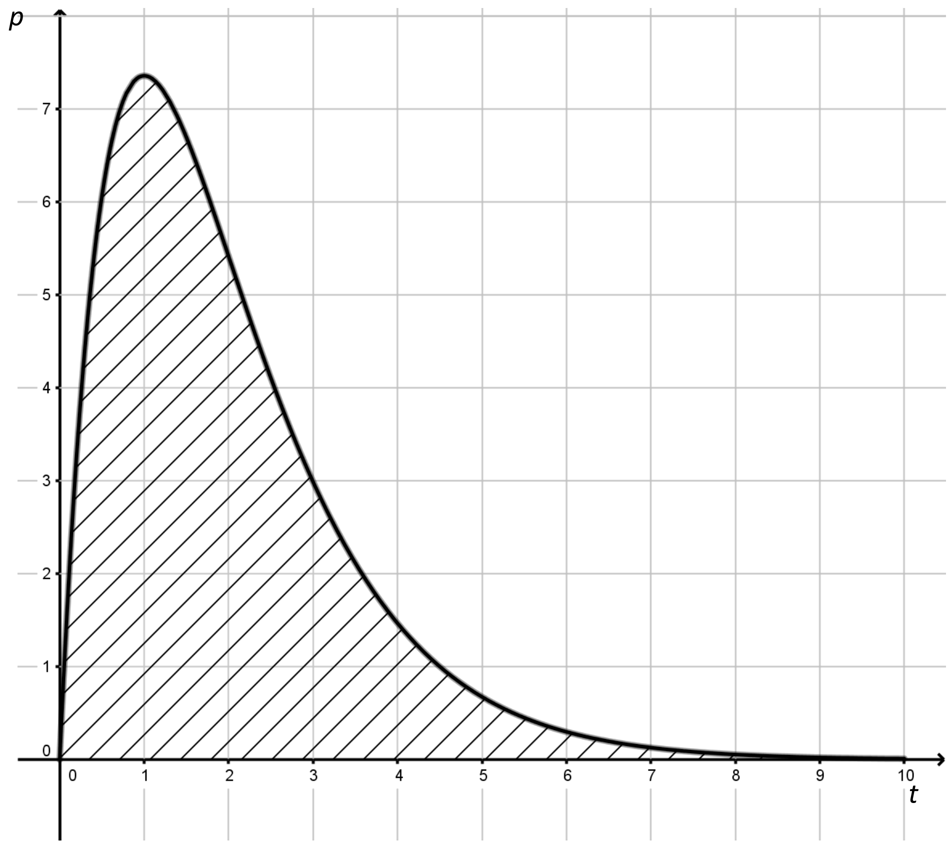
Intégrales, primitives, calculs d'aires

I. Introduction



L' entreprise NVIDIO, spécialisée dans la fabrication de cartes graphiques, contrôle la qualité des condensateurs.

On considère la puissance instantanée *p* (exprimée en Watt) des condensateurs utilisés. La courbe suivante donne les variations de la puissance (en Watt) pour un temps *t* (en seconde) dans l'intervalle [0 ; 10].



D'après le cahier des charges un condensateur est supposé conforme si l'énergie consommée est inférieure à 20 J.

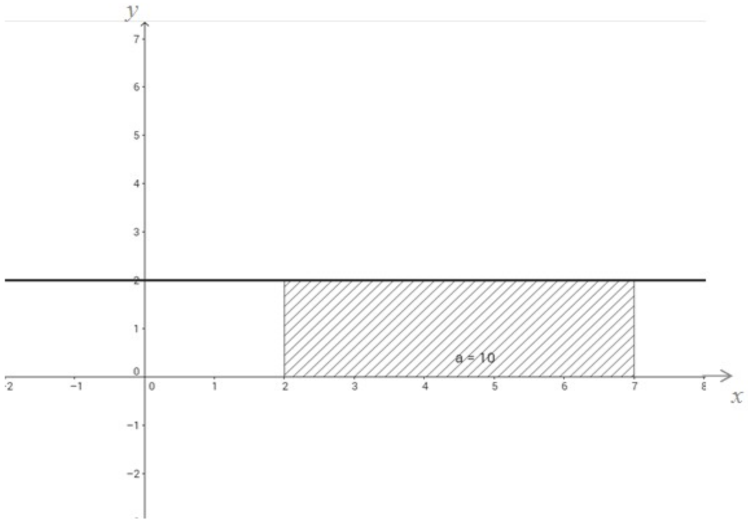
Cette énergie (en Joules) correspond à l'aire (en cm^2 dans ce repère) de la surface sous la courbe.

Question : Donner un encadrement de cette énergie.

II. Calculs d'aires

1. Fonction constante

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = 2$.



a. Calculer l'aire du rectangle hachuré

b. Soit F la fonction définie sur **R** par $F(x) = 2x$.

Calculer $F'(x)$.

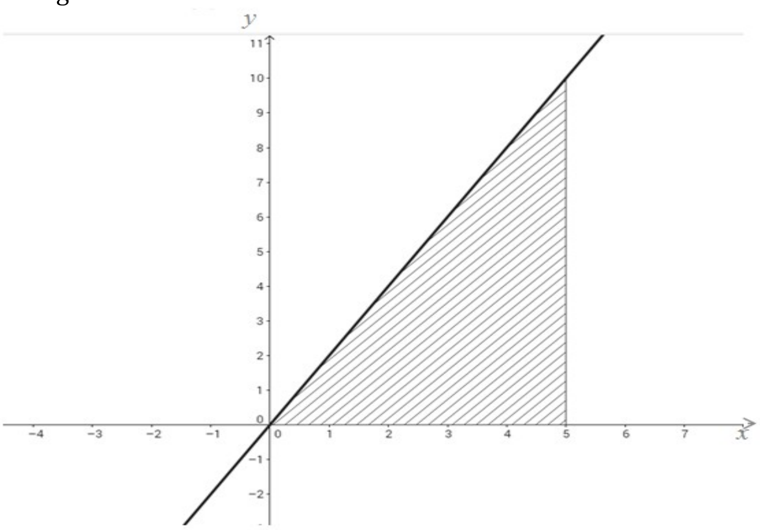
c. Calculer $F(7) - F(2)$.

d. Que constatez-vous ?

2. Fonction linéaire

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x$.

a. Calculer l'aire du triangle hachuré.



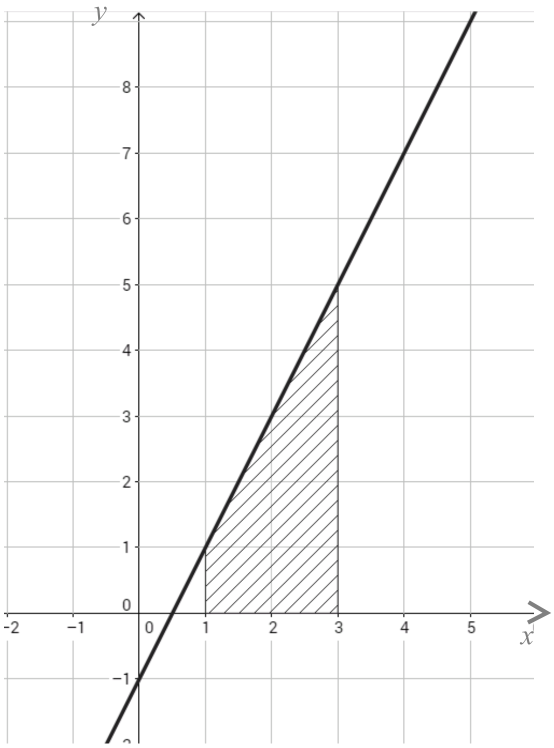
b. Chercher dans votre tableau de dérivées, une fonction F telle que $F'(x) = 2x$.

c. Calculer $F(5) - F(0)$.

d. Que constatez-vous ?

3. Fonction affine

On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = 2x - 1$.



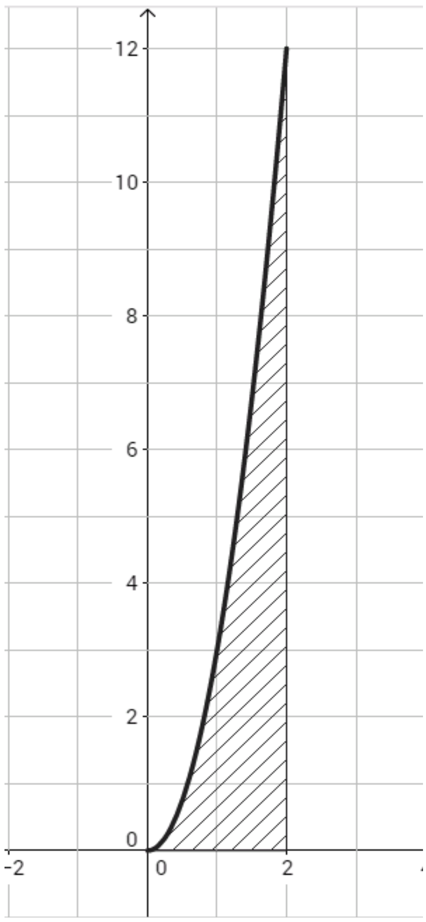
a. Calculer l'aire du trapèze hachuré.

b. Chercher dans votre tableau de dérivées, une fonction F telle que $F'(x) = 2x - 1$.

c. Calculer $F(3) - F(1)$.

Que constatez-vous ?

4. Fonction carrée



On considère la fonction f définie sur **R** par $f(x) = 3x^2$.

On veut déterminer l'aire de la surface hachurée sous la courbe.

a. Donner une estimation (ou un encadrement) de cette aire.

b. En utilisant ce qui a été fait précédemment, proposez une méthode qui permette de calculer la valeur exacte de cette aire.

III. Synthèse

1. Primitive F

Définition : Une fonction F définie sur un intervalle [a ; b] est une primitive de f si

$$F'(x) = f(x).$$

Exemple : dans la partie II on a vu :

La dérivée

$F(x) =$	$F'(x)$ dit aussi $f(x)$
$2x$	
x^2	
$x^2 - x$	
x^3	

Une primitive

Remarque : ne pas confondre F, f et f'. Exemple :

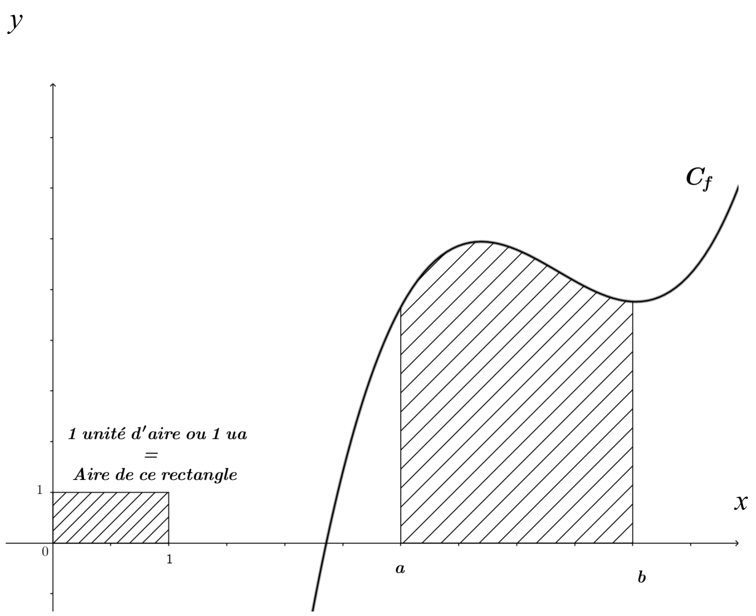
$F(x) =$	$f(x)$	$f'(x)$
x^2	$2x$	
x^3		
	4	
		4

2. Application au calcul d'aires :

Soit f une fonction **positive** sur un intervalle [a ; b]telle que F est une primitive de f sur cet intervalle et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

L'aire (en unité d'aire) de la surface ci-dessous est :

$$\boldsymbol{Aire = F(b) - F(a)}.$$



Notation : Pour procéder au calcul à la machine, on entrera le symbole :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

3. Retour à la problématique de l'introduction

On modélise la puissance p (en W) d'un condensateur par la fonction f définie sur [0 ;10] par :

$$f(x) = 20xe^{-x}.$$

On admet que la fonction F définie par $F(x) = (-20x - 20)e^{-x}$ est une primitive de f.

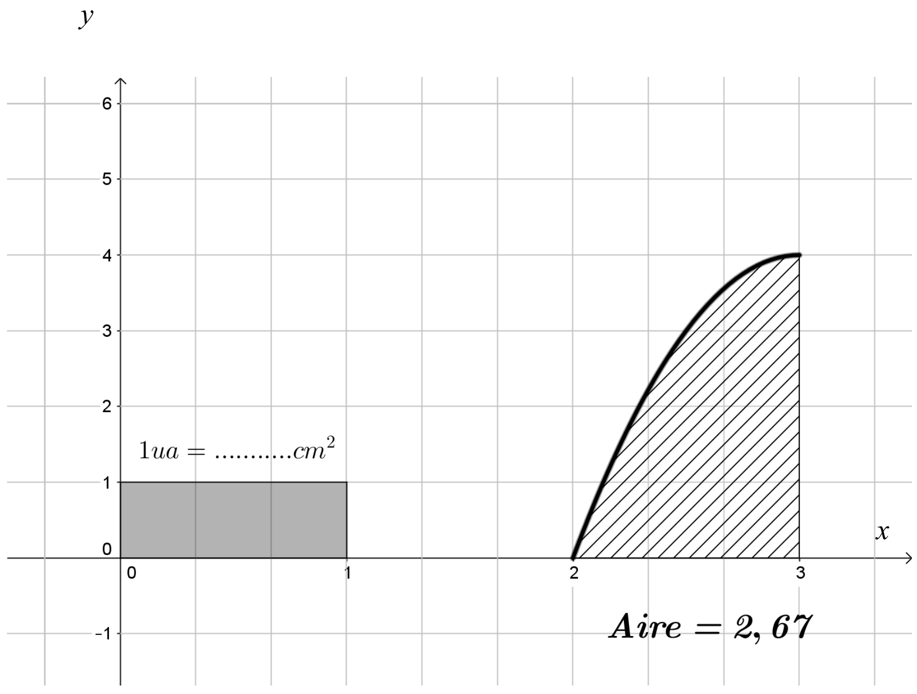
Calculer l'énergie (en Joules) consommée par ce condensateur (correspondant à l'aire de la surface hachurée en cm^2)

Le condensateur est-il conforme au cahier des charges ? Justifier.

IV. Exercices

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[2;3]$ par $f(x) = -4x^2 + 24x - 32$. Sa courbe est représentée dans le repère orthogonal ci-dessous, d'unités graphiques 3 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.



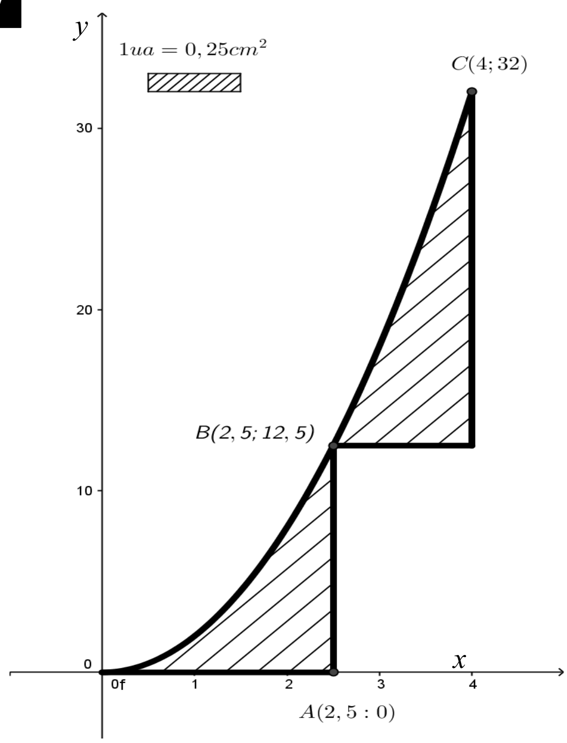
1. Montrer que la fonction F définie sur $[2;3]$ par $F(x) = -\frac{4}{3}x^3 + 12x^2 - 32x$ est une primitive de f.

2. Retrouver l'aire du domaine hachuré en ua (sous la courbe), déterminée par géogébra.

3. En déduire cette aire en cm^2.

Exercice 2

Une entreprise spécialisée dans le sport veut changer de logo, on lui propose le dessin ci-contre :



On modélise ce dessin à l'aide de la fonction f définie

sur $[0;4]$ par $f(x) = 2x^2$

1. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = \frac{2}{3}x^3$ est une primitive de f.
2. Calculer l'aire de la surface « sous la courbe » en ua.
3. En déduire l'aire du logo en ua puis en cm^2.

Exercice 3 : Un pont de zhijinghe

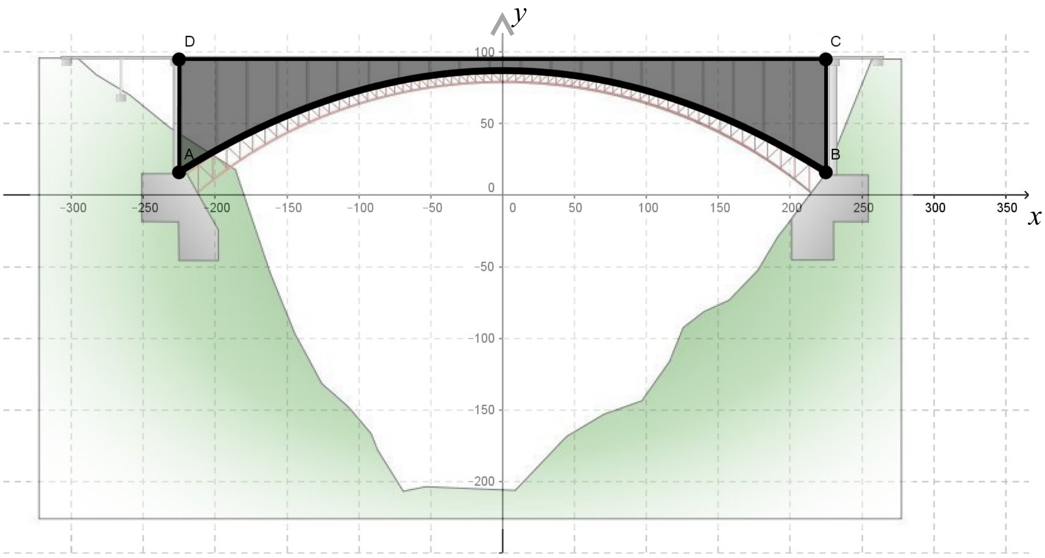
Afin de construire le pont de zhijinghe, les ingénieurs ont été amenés à étudier la résistance au vent. Pour cela, ils ont dû calculer l'aire de la surface latérale. Cette surface est modélisée ci-dessous par la surface grisée.

Nous modéliserons l'arc $\widehat{AB}$ par l'arc de la courbe représentant la fonction f définie sur [-225 ; 225] par :

$$f(x) = -50(e^{0,005x} + e^{-0,005x}) + 187$$

Les points A, B, C, D ont pour coordonnées :

$A(-225\,;16{,}75)$ $B(225\,;16{,}75)$ $C(225\,;95)$ $D(-225\,;95)$



Pour déterminer l'aire de la surface grisée, nous utiliserons la calculatrice et l'intégrale:

$$\int_{\cdots}^{\cdots} \ldots\ldots\ldots \, dx$$

Cette méthode nous permet de déterminer une valeur approchée en ua de l'aire de la surface « sous une courbe ».

1. Calculer à l'aide d'une calculatrice

$$\int_{-225}^{225} \left(-50(e^{0,005x} + e^{-0,005x}) + 187\right) \, dx$$

2. En déduire l'aire (en ua) de la surface grisée.