UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

FICHE DE PRÉSENTATION **FICHE DE PRÉSENTATION** **FICHE DE PRÉSENTATION**

¤ OBJECTIF(S) ¤

- Utiliser le cercle trigonométrique.

¤ EXPLICITATION ¤

- Être capable à l'issue des travaux d'utiliser le cercle trigonométrique pour déterminer :
  - la valeur du sinus et du cosinus d'un angle ;
  - la mesure des angles connaissant la valeur de leur sinus ou cosinus.

¤ PRÉ-REQUIS ¤

- Savoir utiliser le rapporteur.
- Maîtriser la proportionnalité, l'interprétation d'un intervalle et la relation de Pythagore.
- Savoir projeter un point sur un axe et utiliser un repère.

¤ CONDITIONS ¤

- Traiter les exercices dans l'ordre proposé.
- Traiter l'exercice **3** après la correction de l'exercice **2**.
- Traiter l'exercice **6** après la correction de l'exercice **5**.
- Prévoir une calculatrice, un rapporteur, un compas et une règle.

¤ CRITÈRES DE RÉUSSITE ¤

- Exercice **1** : toutes les réponses justes (pour la formulation voir le professeur).
- Exercice **2** : 1er tableau, **trois** bonnes réponses sur **quatre** ;
  2e tableau, **toutes** les réponses exactes.
- Exercice **3** : **six** valeurs exactes sur **huit** ;
  et **huit** valeurs arrondies sur **huit** en lien avec les réponses trouvées.
- Exercice **4** : **six** valeurs exactes sur **huit**.
- Exercice **5** : **douze** valeurs exactes sur **seize**.
- Exercices **6** et **7** : Toutes les réponses justes.
- Exercice **8** : **quatre** valeurs exactes sur **six** dont les deux premières.

¤ CONSEILS ¤

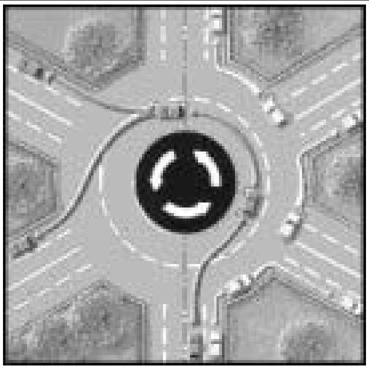
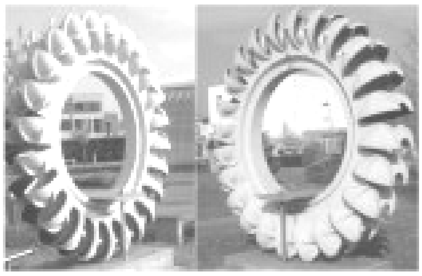
- Faire les tracés avec soin.
- Présenter clairement les réponses plus particulièrement pour les exercices **5** et **8**.

UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

FICHE DE FORMATION **FICHE DE FORMATION** **FICHE DE FORMATION**

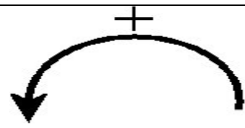
1. Définition du cercle trigonométrique :

1.1. Son sens :

 Short-Track	 Sens giratoire	 Écoulement de l'eau dans l'évier
 Manège	 Vélodrome	 Roues à aubes

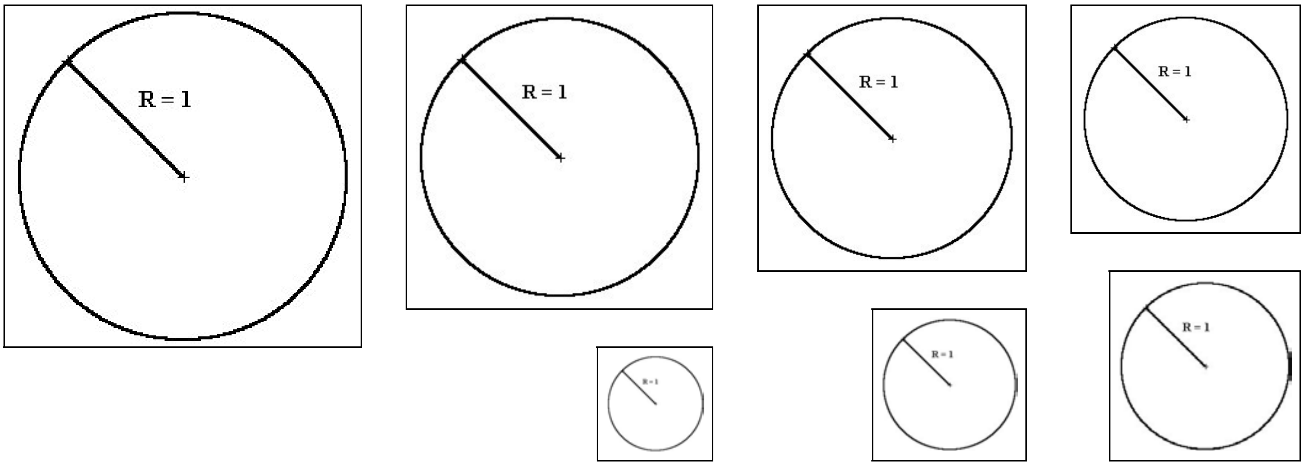
• Dans toutes ces situations les déplacements se font dans le même sens.

• Ce sens a été choisi comme **sens trigonométrique**.



Sens direct

1.2. Son rayon :



• Tous les cercles ont un rayon égal à "**1**".

1.3. Définition :

◆ Un **cercle trigonométrique** est un cercle de **rayon** "**1**" sur lequel le sens de déplacement est le **sens direct**.

UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

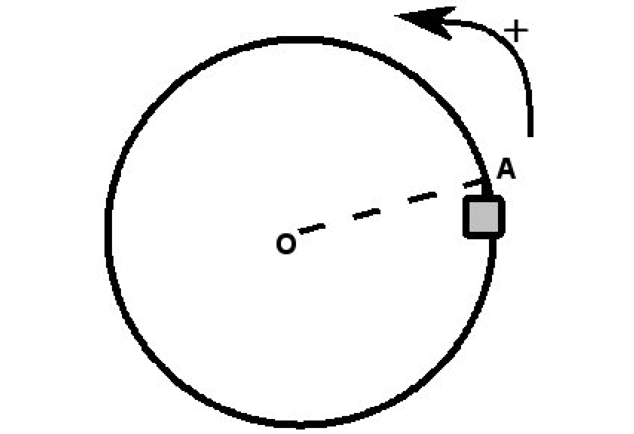
2. Angle orienté :

2.1. Radian :

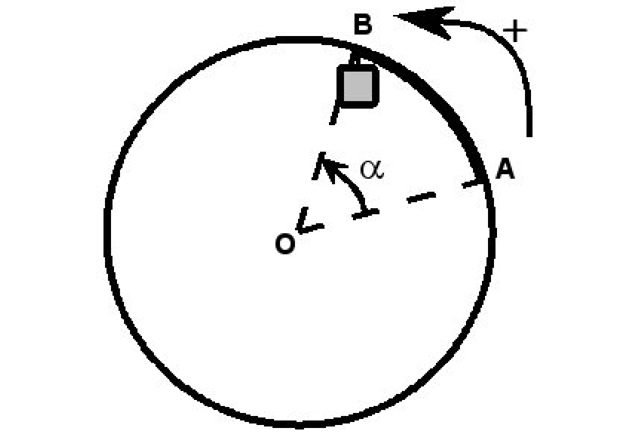
2.1.1. La grande roue :

Elle est munie de nacelles.

Étude du déplacement de l'une d'elles.

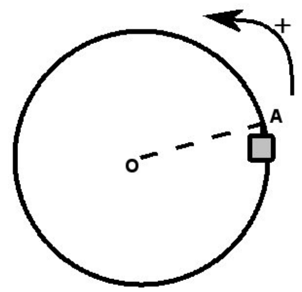


1re Position

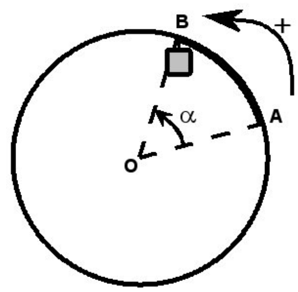


2e Position

• La nacelle se déplace de A en B en parcourant l'arc $\overparen{AB}$.



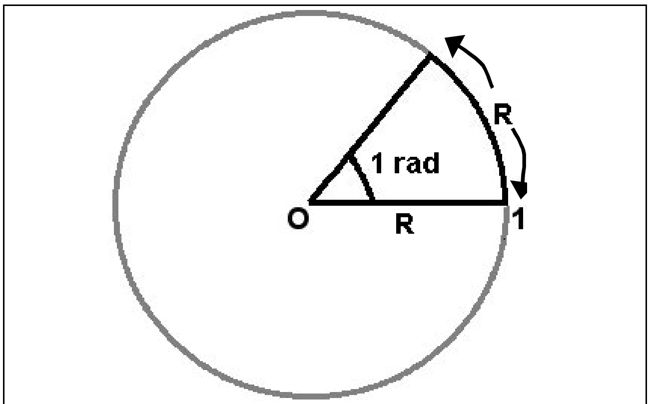
1re Position



2e Position

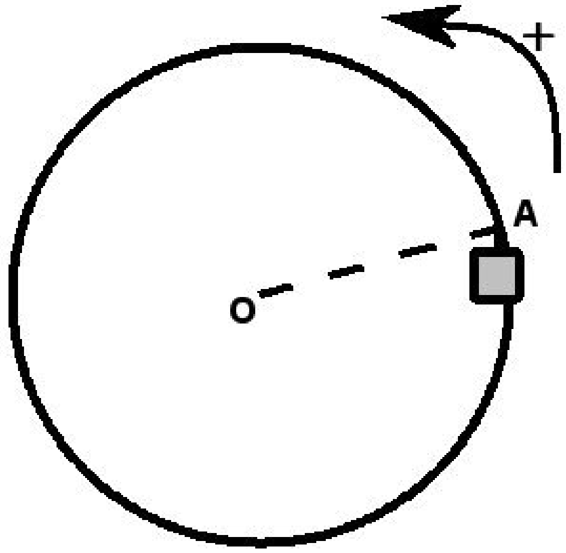
2.1.2. Définition :

◆ L'angle α, qui intercepte un arc de cercle de **longueur égale** au **rayon**, a pour mesure **un radian** (1 rad).

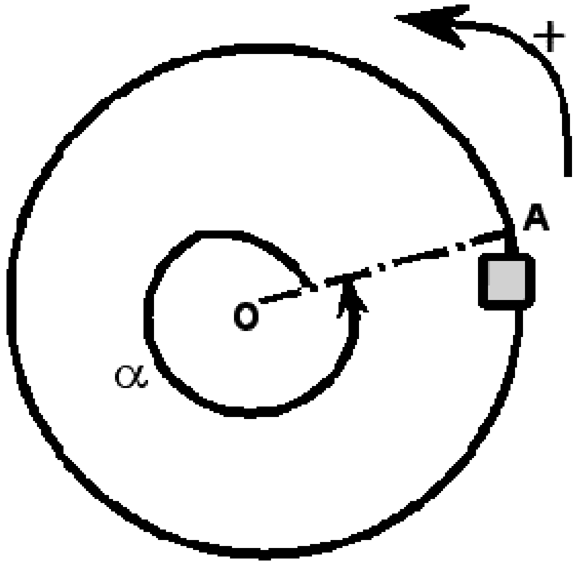


2.1.3. Correspondance radian/degré :

➢ Un tour de roue :



Position initiale



Position finale

Nombre de tours	Distance parcourue	α (radian)	α (degré)
1	2 π R	2 π	360

➢ Radian/Degré :

α (en degré)	30	45	**60**	90	180	**360**
α (en radian)	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\frac{\pi}{2}$	π	**2 π**

Calcul de α, en radian, connaissant sa mesure en degré :

▪ Exemple : $\frac{360}{2\pi} = \frac{60}{\alpha}$

$$\alpha = \frac{2\pi \times 60}{360}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3}$$

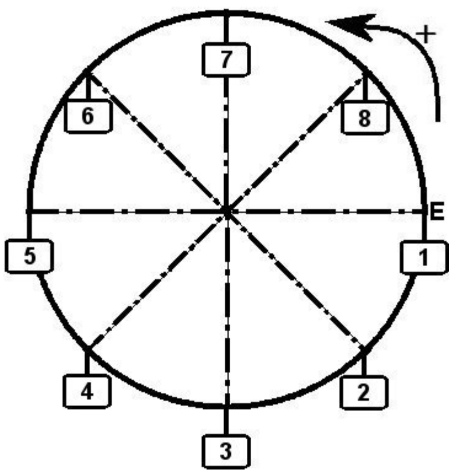
2.2. Angle orienté :

2.2.1. La roue tourne :

• Les touristes accèdent à la grande roue par la plate-forme d'embarquement : E.

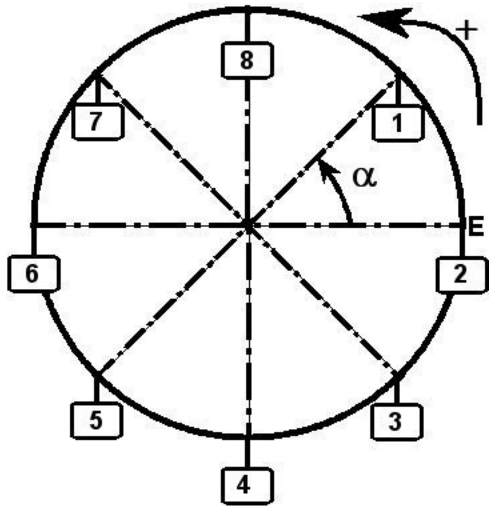
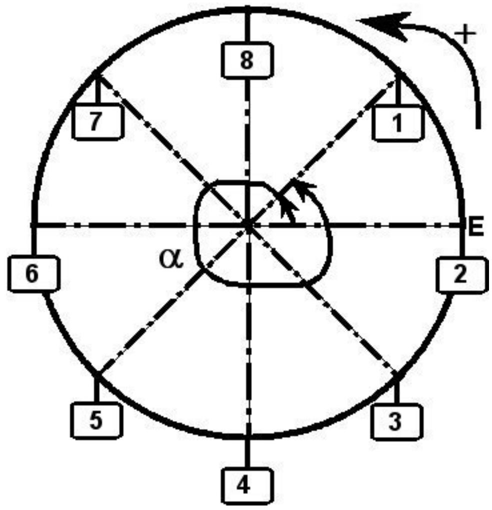
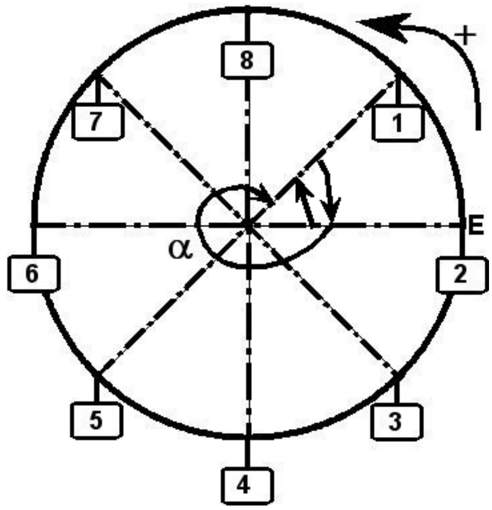
• La position de la nacelle $\boxed{1}$ sur la roue se repère par rapport à l'embarquement par un angle α.

• La nacelle $\boxed{1}$ est à la plate-forme d'embarquement : α = 0 rad



UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

FICHE DE FORMATION **FICHE DE FORMATION** **FICHE DE FORMATION**

Texte	Schéma	Angle (en rad)
• La nacelle $\boxed{2}$ est à la plate-forme d'embarquement. (Les nacelles se remplissent ainsi l'une après l'autre)		$\alpha = \frac{\pi}{4}$
• Un tour après dans le sens direct		$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi$ $\alpha = \frac{9\pi}{4}$
• Un tour après dans le sens indirect		$\alpha = \frac{\pi}{4} - 2\pi$ $\alpha = -\frac{7\pi}{4}$

☝ **Remarque :** Dans les trois situations, la nacelle $\boxed{1}$ occupe la même position. Cette position est repérée par trois mesures différentes, exprimées en radian, du même angle α :

$$\frac{\pi}{4}\ ;\qquad \frac{9\pi}{4}\ ;\qquad -\frac{7\pi}{4}$$

2.2.2. Cas général :

➢ **Un** angle orienté possède **plusieurs** mesures :

α rad ; $(\alpha + 2\pi)$ rad ; $(\alpha + 4\pi)$ rad ; …

$(\alpha - 2\pi)$ rad ; $(\alpha - 4\pi)$ rad ; …

➢ Mesure principale :

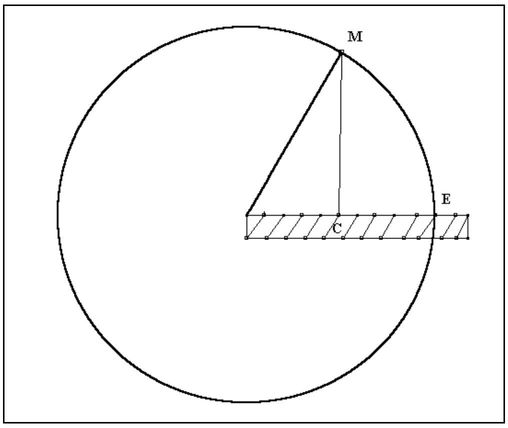
◆ La mesure principale d'un angle orienté est la mesure qui appartient à l'intervalle **] –π ; π]**.

Dans l'exemple de la page précédente, la mesure principale de α est $\frac{\pi}{4}$ rad :

car $\frac{\pi}{4}$ est compris entre $-\pi$ et π alors que $\frac{9\pi}{4}$ est plus grand que π et $-\frac{7\pi}{4}$ est plus petit que $-\pi$.

3. Équations trigonométriques :

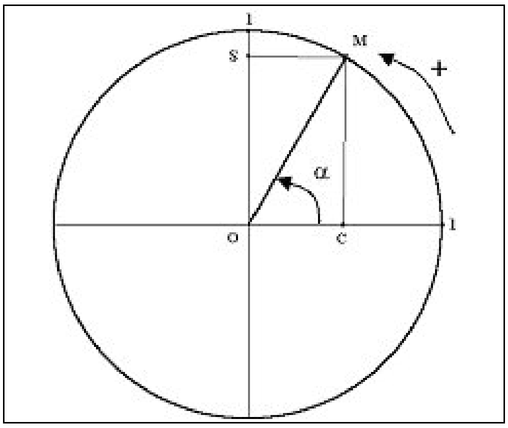
3.1. Situation : nacelle en position $\alpha = \frac{\pi}{3}$



L'occupant de la nacelle lâche son porte-monnaie qui tombe verticalement au niveau de la plate-forme en C.

☞ Quel outil mathématique utiliser pour trouver exactement la mesure de OC connaissant la valeur de l'angle α ?

3.2. Axe des sinus et des cosinus :



3.2.1. Interprétation mathématique :

On considère le cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal.

OM = 1 (cercle trigonométrique)

Le point **M** est projeté sur les deux axes en **C** et **S**.

L'**abscisse** de M est égale à **0,5** ;

l'**ordonnée** de M est égale à **0,9**.

$\cos \alpha = \frac{OC}{OM}$

$\cos \alpha = OC$ (car OM = 1)

La mesure de OC correspond à $\cos \alpha$.

Pour obtenir le **cosinus** d'un angle, il suffit de projeter sur l'axe des **abscisses**.

On appelle cet axe, l'**axe des cosinus**.

$\sin \alpha = \frac{OS}{OM}$

$\sin \alpha = OS$ (car OM = 1)

La mesure de OS correspond à $\sin \alpha$.

Pour obtenir le **sinus** d'un angle, il suffit de projeter sur l'axe des **ordonnées**.

On appelle cet axe, l'**axe des sinus**.

Remarque : En vérifiant à l'aide de la calculatrice, on trouve :

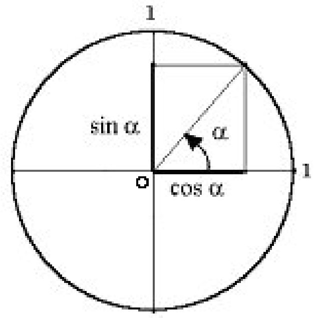
$\cos \frac{\pi}{3} = 0{,}5$

$\sin \frac{\pi}{3} \simeq 0{,}9$ arrondi à 0,1

☞ Le porte-monnaie tombe en C qui se trouve au milieu du segment [OE].

3.2.2. Conclusion :

Dans un cercle trigonométrique, de centre O, muni d'un repère orthonormal, d'origine O, l'axe des abscisses est l'axe des cosinus, l'axe des ordonnées est l'axe des sinus.

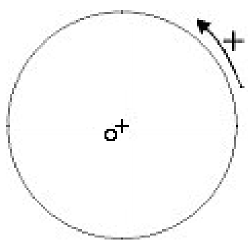
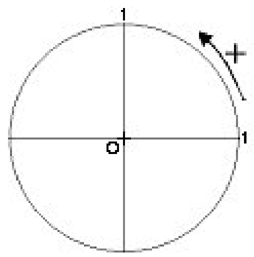
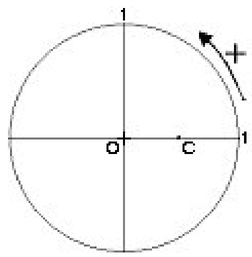
L'observation du cercle trigonométrique permet de voir que les valeurs de sin α et de cos α sont comprises entre −1 et 1.		$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

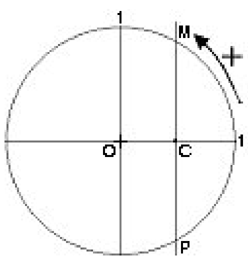
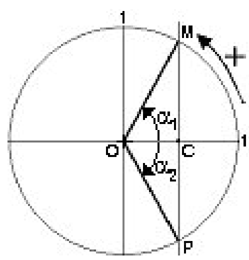
3.3. Résolution d'équations trigonométriques :

3.3.1. Résolution d'équations du type : cos α = *a* :

▪ Exemple : cos α = 0,5

Méthode de résolution :

☞ Tracer le cercle trigonométrique et le repère.		☞ Placer le point C d'abscisse 0,5 sur l'axe des cosinus.
		

☞ Tracer en C la droite parallèle à l'axe des sinus ; elle coupe le cercle en deux points M et P.	☞ Mesurer, en degré, les angles α_1 et α_2.
	

L'équation "cos α = 0,5" admet deux solutions sur l'intervalle] −180° ; 180°].

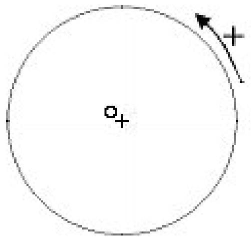
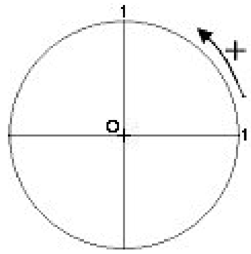
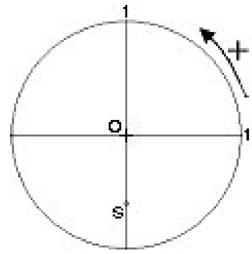
S = {−60° ; 60°}

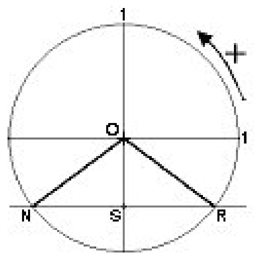
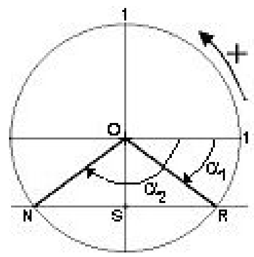
UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

3.3.2. Résolution d'équations du type : sin α = *a* :

▪ Exemple : sin α = –0,6

Méthode de résolution :

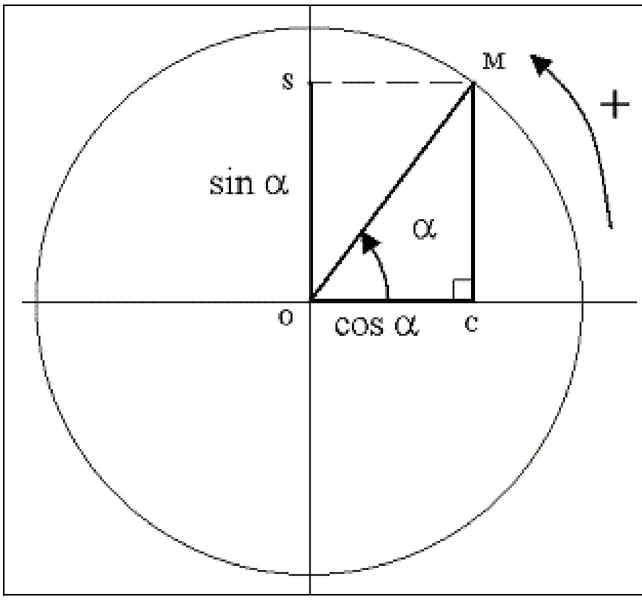
☞ Tracer le cercle trigonométrique et le repère.		☞ Placer le point S d'abscisse –0,6 sur l'axe des sinus.
		

☞ Tracer en S la droite parallèle à l'axe des sinus ; elle coupe le cercle en deux points N et R.	☞ Mesurer, en degré, les angles α_1 et α_2.
	

L'équation "sin α = –0,6" admet deux solutions sur l'intervalle] –180° ; 180°].

S = {–143° ; –37°}

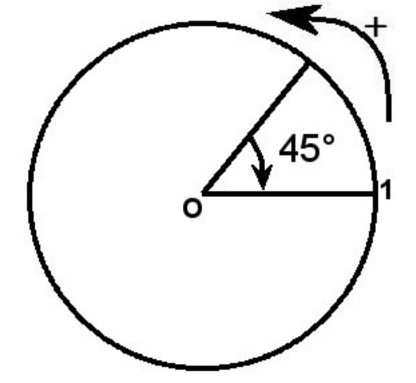
4. Relations trigonométriques :

	Dans le triangle OCM rectangle en C, on applique la relation de Pythagore : $OM^2 = OC^2 + CM^2$ (OS = CM) $OM^2 = OC^2 + OS^2$ L'observation de la figure permet d'écrire : OM = 1 OC = cos α OS = sin α donc $1^2 = (\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2$ $\mathbf{1 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}$

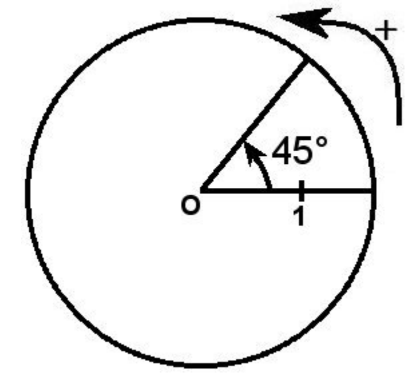
UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

FICHE D'ENTRAÎNEMENT **FICHE D'ENTRAÎNEMENT** **FICHE D'ENTRAÎNEMENT**

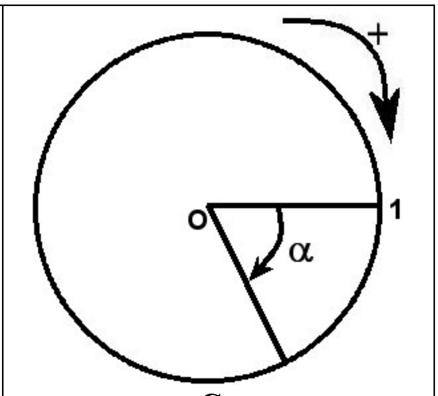
1. Parmi ces cercles :



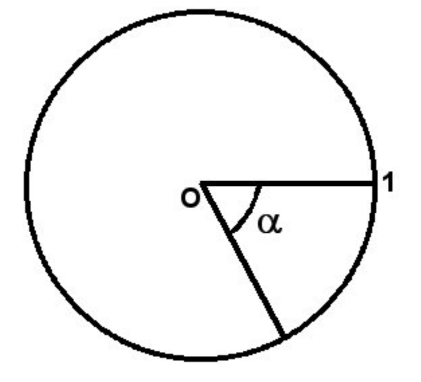
C $_1$



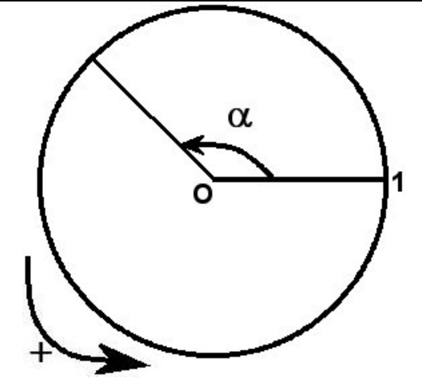
C $_2$



C $_3$



C $_4$



C $_5$

1.1. identifier le cercle trigonométrique : ……………………………………………………………

1.2. repérer, par une **croix**, "les erreurs" sur les quatre autres cercles puis les modifier pour obtenir des cercles trigonométriques.

Le cercle	n'est pas un cercle trigonométrique car
………………	………………………………………………………………………………………
………………	………………………………………………………………………………………
………………	………………………………………………………………………………………
………………	………………………………………………………………………………………

2. Compléter les tableaux de proportionnalité :

Angle (en radian)	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{10}$	…….
Angle (en degré)	…….	15	…….	…….	360

Angle exact (en radian)	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{10}$	…….
Angle arrondi à 0,01 (en radian)	…….	0,26	…….	…….	6,28

UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

3. Donner, en radian, pour les angles suivants, la valeur exacte et la valeur arrondie à 0,1.

Angle (en degré)	140	420	17	135	−30	−60	−210	−720
Valeur exacte (en radian)	………	………	………	………	………	………	………	………
Valeur arrondie à 0,1 (en radian)	………	………	………	………	………	………	………	………

Écrire le calcul dans le cas suivant :

140 °
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………
…………………………………………………

4. Convertir, en degré, et **arrondir** à l’unité :

Angle (en radian)	$\frac{\pi}{15}$	0,25	5π	1	$-\frac{\pi}{20}$	$-0,3$	-4π	-42
Valeur arrondie à l'unité (en degré)	……….	……….	……….	……….	……….	……….	……….	……….

Écrire le calcul dans les cas suivants :

$\frac{\pi}{15}$ **rad**	**0,25 rad**
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………
…………………………………………………	…………………………………………………

UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

FICHE D'ENTRAÎNEMENT **FICHE D'ENTRAÎNEMENT** **FICHE D'ENTRAÎNEMENT**

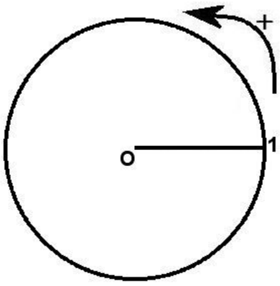
5. Déterminer la mesure principale des angles suivants :

Angle (en degré)	140	420	17	135	–30	–60	–210	–720
Mesure principale (en degré)	....	....	....	....	....	....	....	....

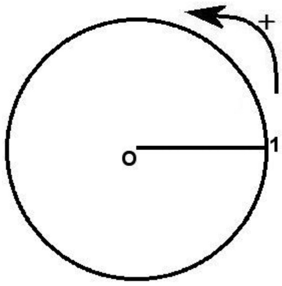
Angle (en radian)	$\frac{\pi}{15}$	0,25	5 π	1	$-\frac{\pi}{20}$	– 0,3	– 4 π	– 42
Mesure principale (en radian)	....	....	....	....	....	....	....	1,98

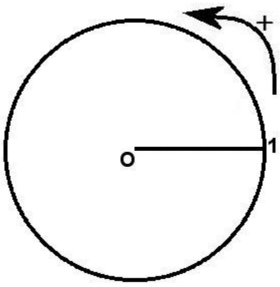
6. Tracer dans le cercle trigonométrique l'angle correspondant :

$\alpha = 140\,°$

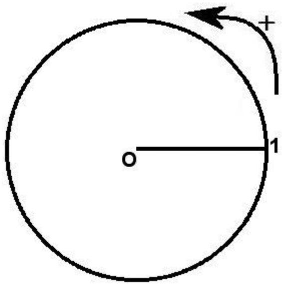


$\varphi = -0{,}3$ rad



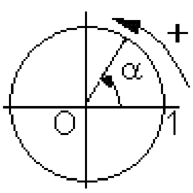


$\beta = -\frac{\pi}{6}$ rad

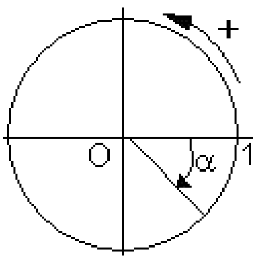


$\theta = 5\,\pi$ rad

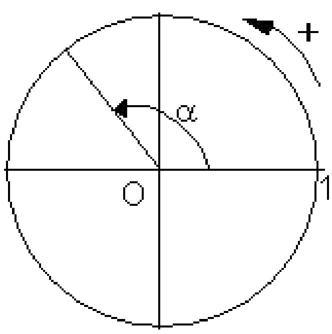
7. Déterminer graphiquement le cosinus et le sinus des angles tracés, arrondir à 0,1 :



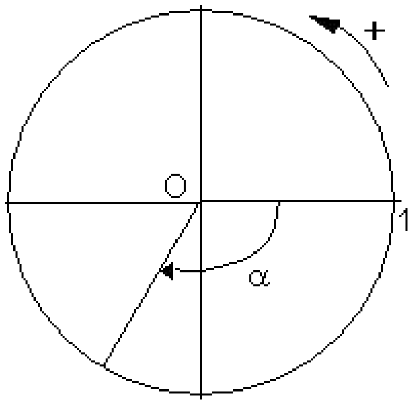
cos α = ...
sin α = ...



cos α = ...
sin α = ...



cos α = ...
sin α = ...



cos α = ...
sin α = ...

UTILISATION DU CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

8. Résoudre, en utilisant le cercle donné, les équations suivantes dans l'intervalle] −π ; π] :

① $\cos x = -0{,}2$ …………………………………………………… …………………………………………………… ……………………………………………………	② $\sin t = 0{,}45$ …………………………………………………… …………………………………………………… ……………………………………………………
③ $\cos \varphi = 1$ …………………………………………………… …………………………………………………… ……………………………………………………	④ $\sin y = -1$ …………………………………………………… …………………………………………………… ……………………………………………………
⑤ $\cos \theta = 0$ …………………………………………………… …………………………………………………… ……………………………………………………	⑥ $\sin \beta = 2$ …………………………………………………… …………………………………………………… ……………………………………………………