LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

I - Découverte de quelques propriétés de la fonction $\ln$ à l'aide de la calculatrice

1) Questions d'introduction :

   a) En utilisant la touche $\ln$ de la calculatrice, donner le résultat, arrondi à 10^{-2}, de :

   $\ln(50) \cong$ ……… ; $\ln(10) \cong$ ……… ; $\ln(1) =$ ……… ; $\ln(0{,}5) \cong$ ……… ; $\ln(0)$ ……… ; $\ln(-0{,}5)$ ………

   Il semble que ……

   ……

   b) En utilisant la touche $\ln$ de la calculatrice, déterminer le signe de :

   $\ln(15)$ ……… ; $\ln(5)$ ……… ; $\ln(1) =$ ……… ; $\ln(0{,}5)$ ……… ; $\ln(0{,}01)$ ………

   Il semble que ……

   ……

   Le résultat du calcul peut être soit ……………………… (si …… < x < ……) soit …………………… (si x > ……).

   Conclusions :

> L'ensemble de définition de la fonction logarithme népérien est ……………………… (celui de la fonction logarithme décimal était □ le même / □ différent).
>
> Les images de la fonction ln sont de signe …………………………………………………………………………… (pour la fonction logarithme décimal, on avait trouvé □ la même chose / □ différemment).
>
> L'image de 1 est ………… : $\ln(1) =$ ……

2) Représentation graphique des 2 logarithmes :

Avec la calculatrice graphique, représenter les fonctions logarithmes décimal et népérien ($0 < x < 10$ par pas de 1 et $-10 < y < 6$ par pas de 1).

Tableau de variations de la fonction ln :

$\boldsymbol{x}$	
$\mathbf{ln}\ (\boldsymbol{x})$	

Remarque : le tableau de variations de la fonction logarithme décimal est ………………………………

3) <u>Lien entre les 2 fonctions logarithmes</u> :

Dans le MENU 7, demander la table des valeurs (F6) et noter les résultats ci-dessous (à 10^{-4} près) :

x	10	20	30
$\ln(x)$			
$\log(x)$			
$\dfrac{\ln(x)}{\log(x)}$			

<u>Conclusion</u> :

Les fonctions logarithme népérien et logarithme décimal sont ……………………………………………………

Le coefficient de proportionnalité est environ ………………………… Il correspond à la valeur de $\ln(\ldots)$.

4) <u>Dérivée de la fonction logarithme népérien</u> :

Depuis MENU 1, aller dans OPTN puis CALC (F4) puis dérivée (F2) en diverses valeurs de x.

Compléter le tableau :

x	1	2	5	10
$\dfrac{d}{dx}(\ln(x))_x$				
$x \times \dfrac{d}{dx}(\ln(x))_x$ (produit des 2 cases de la colonne)				

On remarque que : $x \times \frac{d}{dx}(\ln(x))_x =$ ……………….. $\Leftrightarrow$ $\frac{d}{dx}(\ln(x))_x =$ ………

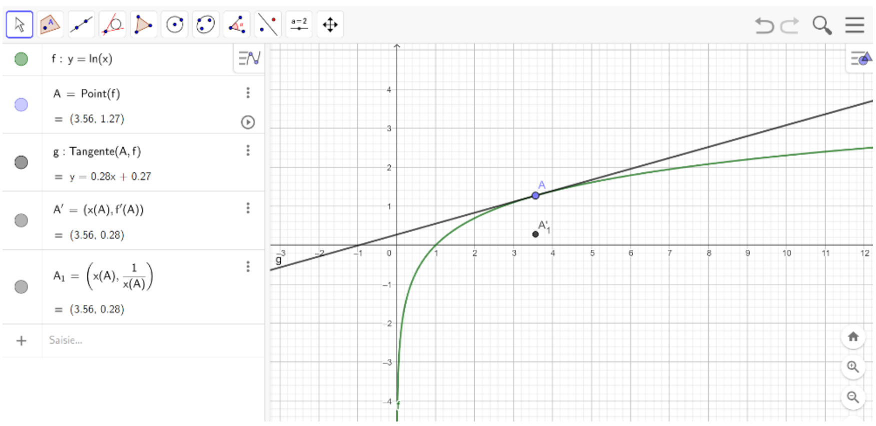
<u>Conclusion</u> :

La dérivée de la fonction logarithme népérien est ……………………………………………………………

$$\frac{d}{dx}(\ln(x))_x = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comme $x > 0$, alors la dérivée est de signe …… : la fonction logarithme népérien, comme la fonction logarithme décimal, est …………………………… (croissante/décroissante).

<u>Vérification avec Geogebra :</u>



II - Propriétés opératoires de la fonction $\ln$

Ce sont les mêmes que celles du logarithme décimal, à savoir :

$\ln(ab) =$ .... ; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) =$ .... ; $\ln(a^n) =$ ....

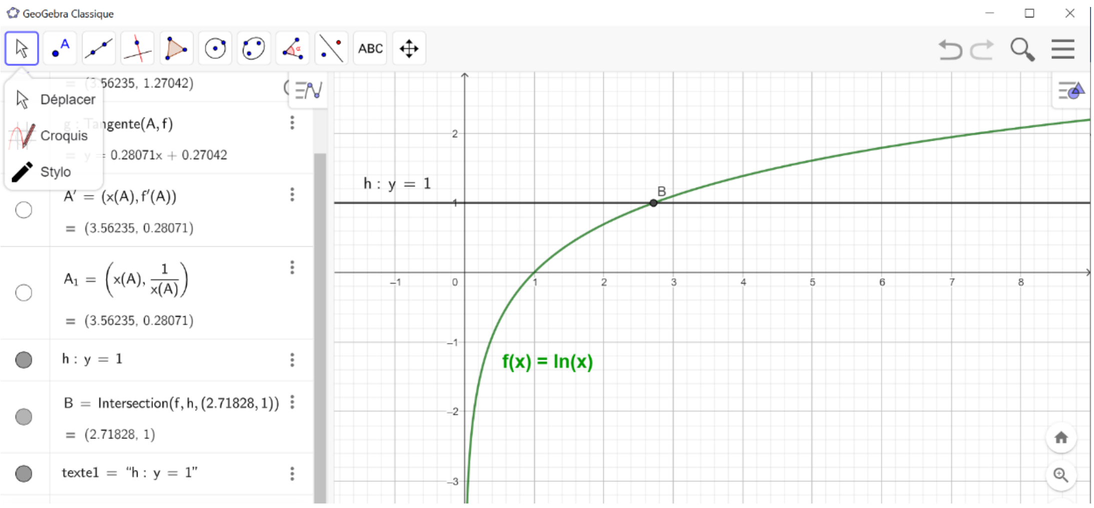
III – Pour introduire la fonction qui suivra, qui se nomme exponentielle de base e…

- Sur la calculatrice, dans le MENU Graphe, sur la ligne Y2 (donc à la place de la fonction $\log(x)$), demander le tracé de la fonction constante Y2 = 1 ;
- Faire apparaître le tracé des deux courbes représentatives ;
- Appuyer sur F5 (G-Solv) et encore une fois sur F5 (INTSECT) ;
- Noter les coordonnées du point d'intersection : X = ... ; Y = ...

Conclusion :

La valeur trouvée pour x se nomme **exponentielle 1** et se note e^1 ou encore seulement e.

Elle est telle que : $\ln(e^1) = 1$



Exercices d'application :

1) Simplifier les expressions suivantes en utilisant les propriétés opératoires de la fonction ln :

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b) =$ ....

$\ln\left(\frac{a^2}{b}\right) + \ln(ab) =$ ....

$\ln(a^2) - \ln(a) =$ ....

$\ln(a) + 2\ln(a^3) =$ ....

2) Sans l'aide de la calculatrice, relier chaque nombre de gauche à son expression équivalente de droite :

$\ln(4)$	•	•	$2\ln(3)$
$\ln(6)$	•	•	$\ln(12) - \ln(3)$
$\ln(9)$	•	•	$\ln(2) + \ln(3)$

3) Une entreprise prévoit d'augmenter sa production de vélos électriques de 25 % par an. A la fin de la première année, elle en fabrique 3 600. Elle souhaite savoir le nombre d'années nécessaires pour que la production soit de 7 200 vélos.

a) Donner la nature de la suite (u_n) des productions.

....

b) La formule permettant de calculer un terme éloigné est : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ (avec $n \geq 1$).

- Ecrire l'équation d'inconnue n.

....

- La résoudre à l'aide du logarithme népérien (pour changer !).

....

....

....

- Répondre à la problématique posée.

....

4) Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 5x - 4\ln(x)$

a) Donner l'expression de la dérivée de f.

....

b) Déterminer la valeur de x pour laquelle on a $f'(x) = 0$.

....

c) Déterminer sur quel intervalle de x on a $f'(x) < 0$.

....

d) Déterminer sur quel intervalle de x on a $f'(x) > 0$.

....

e) Compléter le tableau de variations de la fonction f :

x	
Signe de $f'(x)$	
f	

f) Retrouver les résultats ci-dessus à l'aide de la calculatrice graphique.